REPUBLIQUE DU BENIN

&&&&&&&&

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE,TECHNIQUE ET DE LA FORMATION PROFESSIONNELLE

&&&&&&&&

DIRECTION DE L'INSPECTION PEDAGOGIQUE

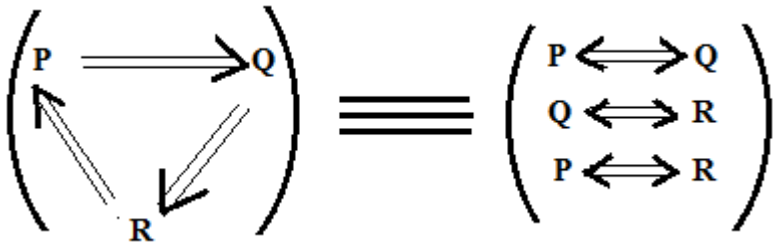
&&&&&&&&

NOUVELLES BASES DES MATHEMATIQUES

COLLECTION LA PRIORITE DE GODATH

LABORATOIRE DE MATHEMATIQUES GENERALES DE PREMIERE C

Tome 1



CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE GODSOU

EDITION : 2018

Préparation dans le

Raisonnement, l'

Imagination, l'

Observation, la

Réflexion et à l'

Intuition

Technique pour les

Etudes

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

PREFACE

Vu les difficultés que pose l'enseignement des mathématiques selon l'Approche Pédagogique par Compétence, je me suis donner le devoir de concevoir un manuel pouvant régler en partie les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques qui joue un rôle essentiel dans la préparation des jeunes au défi de l'avenir. La COLLECTION LA PRIORITE DE GODATH que je propose aujourd'hui aux élèves de l'enseignement secondaire du Bénin est le fruit des enseignants qui n'ont ménagé aucun effort pour ma formation.

Elle a pour objectif :

- L'harmonisation de la pédagogie mathématique et la mise à la disposition des élèves et des enseignants un manuel de qualité tenant compte du milieu socioculturel en tant que support et véhicule privilégié des concepts mathématiques.
- L'acquisition par les élèves des bases d'une formation mathématique solide qui leur permettent d'analyser une situation, de conjecturer des hypothèses et de les valider ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, de recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissent et de dégager une conclusion.

Les ouvrages de la COLLECTION LAPRIORITE DE GODATH rédigée par GOSSOU Daniel Théophile, Professeur Adjoint de mathématiques, Ancien étudiant de l'Ecole Normale Supérieure de Natitingou, s'appuie sur l'environnement des élèves pour les motiver, les faire agir, les amener à comprendre et à agir de nouveaux. de manières autonome et créatrice. Les contenus adoptés et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs collèges et lycée du BENIN avant que ne soit entreprises les rédactions définitives. Conformément à ma conception de l'enseignement des mathématiques, je n'ai pas voulu présenter les séquences d'apprentissage sous formes d'exposé théorique mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture des documents sont mis encore pour solliciter et provoquer constamment la participation active des élèves.

La structure du document se présente comme suit pour permettre l'assimilation des notions étudiées.

- Evaluations diagnostiques
- Cours
- Maîtrise du cours
- Fiches de travaux dirigés
- Exercices d'entraînement
- Evaluations ponctuelles d'étape
- Quelques problèmes
- Sujets d'évaluation sommative

J'exprime ma gratitude aux différents ministres chargés de l'éducation en république du Bénin ainsi qu'aux inspecteurs, conseillers pédagogiques, le départementde mathématique à l'UAC, l'institut de mathématiques et de sciences physiques de Dangbo et l'école normale supérieure de Natitingou, qui par leurs compréhensions, leurs encouragements et leur soutien constant tant moral que matériel, m'ont permis de réaliser ces ouvrages dans les meilleures conditions possibles.

Enfin, j'espère que ce manuel répondra au mieux à l'attente et aux besoins des utilisateurs (enseignants et apprenants) afin d'en améliorer les prochaines éditions. J'accueillerai avec reconnaissance les remarques, les critiques et les suggestions qu'ils voudront me faire et par avance, je les en remercie

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

REMERCIEMENT

La conception de la COLLECTION LA PRIORIETE DE GODATH n'a été effective que grâce aux nombreuses personnes (parents, enseignants, amis). C'est pour cela que je leur témoigne ma gratitude. Qu'ils reçoivent ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Il s'agit de :

GOSSOU Kénou Norbert : Père du Professeur GOSSOU Daniel Théophile

Madame GOSSOU Rosaline : Mère du Professeur GOSSOU Daniel Théophile

BLEOSSI Koffi Jacob : Instituteur à la retraite

EDAH Paulin : Professeur certifiée des Mathématiques à la retraite

MEADAN Vincent : Professeur certifié de Sciences Physiques

OGOUNLOLA Paul Raymond : Professeur certifié des Sciences de Vie et de la Terre

AZONHOU Paterne : Ingénieur des ponts et chaussées

DOSSOU Dossa Pièrre : Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

VIGNIGBE Parfait : Professeur certifiée de Sciences, Physiques, Conseiller Pédagogique

BALLO B. G. Leprince : Professeur de Sciences Physiques

SEBIO C. Labani : Professeur de Mathématiques

AFOGNON Gervais : Docteur en didactique des Mathématiques

TCHEGBLE Michel : Professeur certifiée des Mathématiques Conseiller Pédagogiques

AGNONDO Maxime : Professeur certifiée des Mathématiques Conseiller Pédagogiques

KPAMEGAN Pascal : Professeur certifiée des Mathématiques Conseiller Pédagogiques

KPAMEGAN Bernardin : Professeur de mathématiques à l'UAC

DEGLA Serge : Professeur de mathématiques à l' ENS de Natitingou

DEGLA Guy : Professeur de Sciences physiques à l'UAC

OGOUNYANDJOU Carlos : Professeur de mathématiques à l'UAC

TODJIHOUNDE Léonard : Professeur de mathématiques à l'UAC

ATINDOGBE Cyriaque : Professeur de mathématiques à l'UAC

ATOGOUINON André : Professeur de Sciences physiques à l'UAC

HOUEDANOU Wilfried Professeur de mathématiques à l'UAC

LEADI Arèmou Léamidi Professeur de mathématiques à l'UAC

HOUNON Hyppolyte Professeur de mathématiques à l'UAC

KOUCHADE Clément Professeur de Sciences physiques à l'UAC

ATTAN Sylvain Professeur de mathématiques à l'UAC

BALOITCHA Ezinvié Professeur de Sciences physiques à l'UAC

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

STRUCTURE DU DOCUMENT

.1. Evaluations diagnostiques

.2. Cours

.3. Maîtrise du cours

.4. Fiches de travaux dirigés

.5. Exercices d'entraînement

.6. Evaluation ponctuelle d'étape

.7. Quelques problèmes

.8. Evaluations sommatives

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

EVALUATIONS DIAGNOSTIQUES

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1 : ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Evaluation n°1: Durée : 5 minutes
Evaluation n°2 : Durée : 5 minutes
Evaluation n°3 : Durée : 10 minutes
Evaluation n°4 : Durée : 10 minutes
Evaluation n°5 :Durée : 25 minutes

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2 : SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Evaluation n°1: Durée : 10 minutes
Evaluation n°2 : Durée : 15 minutes
Evaluation n°3 : Durée : 30 minutes
Evaluation n°4 : Durée : 30 minutes
Evaluation n°5 : Durée : 15 minutes

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3 : VECTEURS DE L'ESPACE

Evaluation n°1: Durée : 20 minutes
Evaluation n°2 : Durée : 20 minutes
Evaluation n°3 : Durée : 15 minutes
Evaluation n°4 : Durée : 15 minutes

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4 : PRODUIT SCALAIRE

Evaluation n°1: Durée : 10 minutes
Evaluation n°2 : Durée : 10 minutes
Evaluation n°3 : Durée : 15 minutes
Evaluation n°4 : Durée : 20 minutes

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°5 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Evaluation n°1: Durée : 10 minutes
Evaluation n°2 : Durée : 25 minutes
Evaluation n°3 : Durée : 10 minutes
Evaluation n°4 : Durée : 15 minutes

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1: ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Evaluation n°1

Définis avec figure à l'appuie
1°) Deux droites parallèles
2°) Deux droites coplanaires
3°) Deux droites perpendiculaires

Evaluation n°2 :

1°) Définis
-a) Droites et plan perpendiculaires
-b) Droites et plan parallèles
-c) Plan perpendiculaires
2°) Définis de deux manières différents deux plans parallèles.

Evaluation n°3 :

1°) Représente un cube ABCDEFGH en perspective cavalière
2°) Trouve dans cette représentation
-a) Deux droites perpendiculaires
-b) Deux droites coplanaires
-c) Une droite et un plan parallèles
-d) Une droite et un plan perpendiculaire
-e) Deux plan parallèles
-f) Deux plans perpendiculaires

Evaluation n°4 :

Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :
A_1 : Dans l'espace si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaires à l'un est perpendiculaire à l'autre.
A_2 : Dans l'espace si deux droites sont parallèles, tout plans perpendiculaires à l'une est perpendiculaire à l'autre
A_3 : Dans l'espace si deux droites sont parallèles, toute droites parallèles à l'une est parallèle à l'autre.
A_4 : Dans l'espace si une droites est perpendiculaires à un plan alors elle est perpendiculaires à toutes les droites de ce plan.
A_5 : Dans l'espace si une droites est parallèles à un plan alors elle est parallèles à toutes les droites de ce plan.
A_6 : Si deux plans sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'un est perpendiculaires à l'autre.
A_7 : Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite parallèles à l'un est perpendiculaires à l'autre.
A_8 : Deux plans perpendiculaires à un même plan sont perpendiculaires

Evaluation n°5 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a $avec$ $a \in \mathbb{R}_+^*$
1°) Représente ce cube en perspective cavalière.
2°) Démontre que les droites (AC) et (EG) sont parallèles.
3°) Démontre que les droites (AH) et (BG) sont coplanaires.
4°) Démontre que la droite (BF) est perpendiculaire au plan (ABC).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

5°) Démontre que les plans (ADH) et (BCG) sont parallèles.
6°) Démontre que le quadrilatère DBFH est un rectangle.
7°) Calcule le périmètre du triangle DBF en fonction de a.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2: SYTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Evaluation n°1

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1): x+1=2 (E_2): 6x=6 (E_3): 3x-1=5$

$(E_4): x-3=3x-7 (E_5): x^2-1=0 (E_6): 4x^2=9$

Evaluation n°2

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$(E_1): x+1=x-3 (E_2): 2x-3=2\left(x-\frac{3}{2}\right) (E_3): x^2+1=0$

$(E_4): 3x^2+1=28 (E_5): x^2-4=x-2 (E_6): (x^2-2x+1)=3(x-1)+x^2-1$

Evaluation n°3

Résous dans$\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

$(S_1): \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x-3y-4=0 \end{cases}; (S_2): \begin{cases} 2|x|+y^2-1=0 \\ |x|-3y^2-4=0 \end{cases}; (S_3): \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y=-1 \end{cases}; (S_4): \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x-y=-5 \end{cases};$

$(S_5): \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}; (S_6): \begin{cases} x^2-y^2=5 \\ x+y=-1 \end{cases}; (S_7): \begin{cases} x^2-y^2=13 \\ x-y=-5 \end{cases}; (S_8): \begin{cases} x^2-y^2=13 \\ xy=-6 \end{cases}$

Evaluation n°4

Résous dans$\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivants :

$(S_1): \begin{cases} x^2+y=6 \\ 2x^2+3y=2 \end{cases}; (S_2): \begin{cases} 2|x|-y=0 \\ -3|x|+4y=10 \end{cases}; (S_3): \begin{cases} x-(y-1)^2=-8 \\ 4x+3(y-1)^2=31 \end{cases};$

$(S_4): \begin{cases} 2|x|+|y|=8 \\ 3|x|-2|y|=5 \end{cases}; (S_5): \begin{cases} \sqrt{x}+2\sqrt{y+1}=3 \\ \sqrt{4x}+3\sqrt{y+1}=13 \end{cases}; (S_6): \begin{cases} \frac{1}{x-1}+\frac{3}{y+2}=\frac{1}{2} \\ \frac{2}{1-x}+\frac{1}{y+2}=\frac{3}{2} \end{cases};$

Evaluation n°5

Pour assister à un spectacle, la famille Tchikaya composée de deux adultes et de trois enfants a payé 9500 F CFA. Madame Wemba accompagnée de ses quatre enfants ont payé 8500 F CFA. Détermine le prix d'un billet d'entrée pour un adulte et celui d'un billet d'entrée pour un petit.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3: VECTEURS DE L'ESPACE

Evaluation n°1

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de directions distinctes.
1°) Trouve une écriture simplifiée de chacun des vecteurs suivants.
$\vec{a} = 2\left(\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}\right)$;
$\vec{b} = 3\left(\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}\right) + 4\left(\frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}\right)$;
$\vec{c} = -2\left(\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{3}{5}\vec{v}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{5}\vec{v}\right)$
2-a) Justifie que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base.
-b) Détermine dans cette base les cordonnées des $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.
-c) Parmi les couples suivants, détermine ceux qui sont des bases. $(\vec{a}, \vec{b})$, $(\vec{a}, \vec{c})$ et $(\vec{b}, \vec{c})$

Evaluation n°2

Soit $\vec{p}$ un vecteur non nul et x un nombre réel.
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par : $\vec{u} = (2x+1)\vec{p}$ et $\vec{v} = (3x-6)\vec{p}$.
1°) Détermine les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ et $3\vec{u} - 2\vec{v}$ en fonction de $\vec{p}$
2°) Détermine l'ensemble des nombres réels $x$pour lesquels :
-a) $\vec{u}$ est le vecteur nul.
-b) $\vec{v}$ est le vecteur nul.
-c) $(x+6)\vec{u} + (x+1)\vec{v}$ est le vecteur nul.

Evaluation n°3

Soit ABCD un parallélogramme de centre O. On désigne par P le milieu de [AB] et par G l'intersection des droites (BD) et (CP).
1°) Démontre que G est le centre de gravité du triangle ABC.
2°) Ecris le vecteur $\overrightarrow{CD}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
3°) Démontre que $3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

Evaluation n°4

ABC est un triangle. On considère les points I et G définis par :
- ✓ I est le milieu du segment [BC]
- ✓ $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$

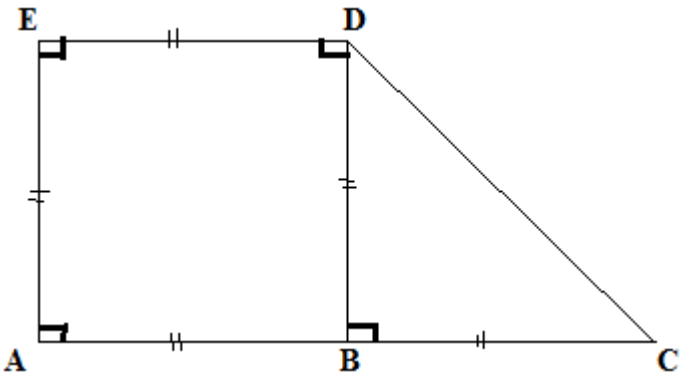
1°) Fais une figure.
2-a) Exprime $\overrightarrow{GC}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
-b) Détermine les coordonnées de G dans le repère (B, C, A)
-c) Détermine les coordonnées de G dans le repère (A, B, C)

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: PRODUIT SCALAIRE

Evaluation n°1

On considère la figure suivante où AB $mesure$ $5cm$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU



1°) Calcule DC.

2°) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}$

Evaluation n°2

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs
On pose : $\alpha = mes\,(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.
1°) Dans le cas où $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{3}, \|\vec{v}\| = 3, \alpha = \frac{\pi}{6}$, calculer $\vec{u}.\vec{v}$.
2°) Dans le cas où $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{4\pi}{9}, \|\vec{u}\| = 2$, calculer$\|\vec{v}\|$.
3°) Dans le cas où$\vec{u}.\vec{v} = 3\,, \|\vec{u}\| = 2,\ \|\vec{v}\| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, déterminer$|\alpha|$.

Evaluation n°3

ABC est un triangle quelconque et on désigne par [AA'] la médiane relative au côté [BC].
1°) Démontre que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$
2°) Démontre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$
3°) Démontre que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.ACcos\widehat{BAC}$

Evaluation n°4

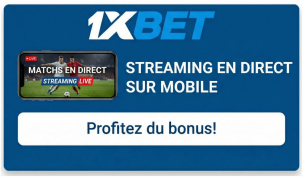
Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1;3), B(-2;1) et\ C(5;-3)$
1°) Calcule les longueurs AB, AC et BC.
2°) Calcule les mesures en degré de chacun des trois angles du triangle ABC.
3° Calcule les longueurs des médianes de ce triangle.
4°) Calcule la hauteur relative au côté [BC]

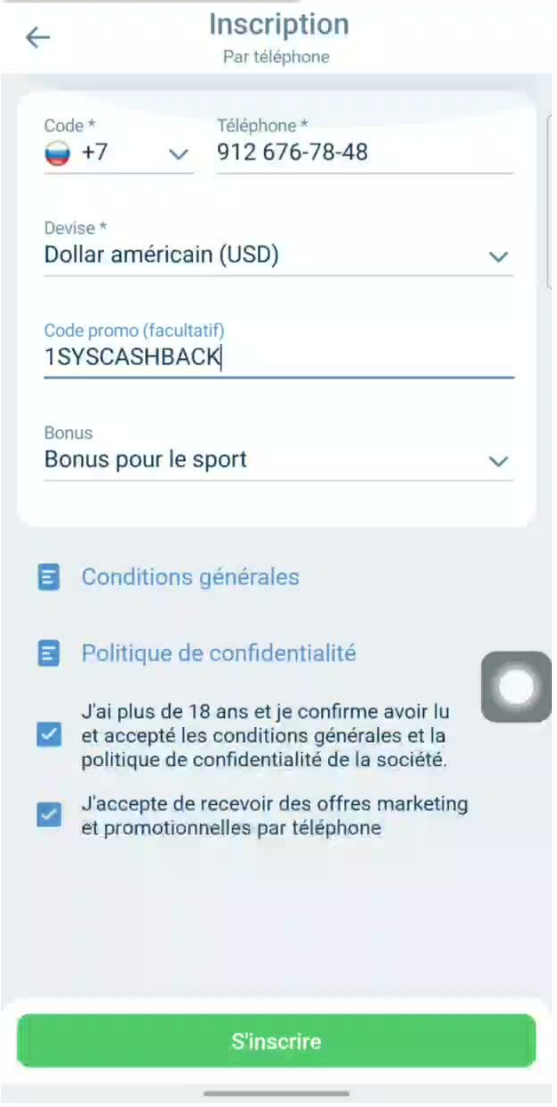
CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

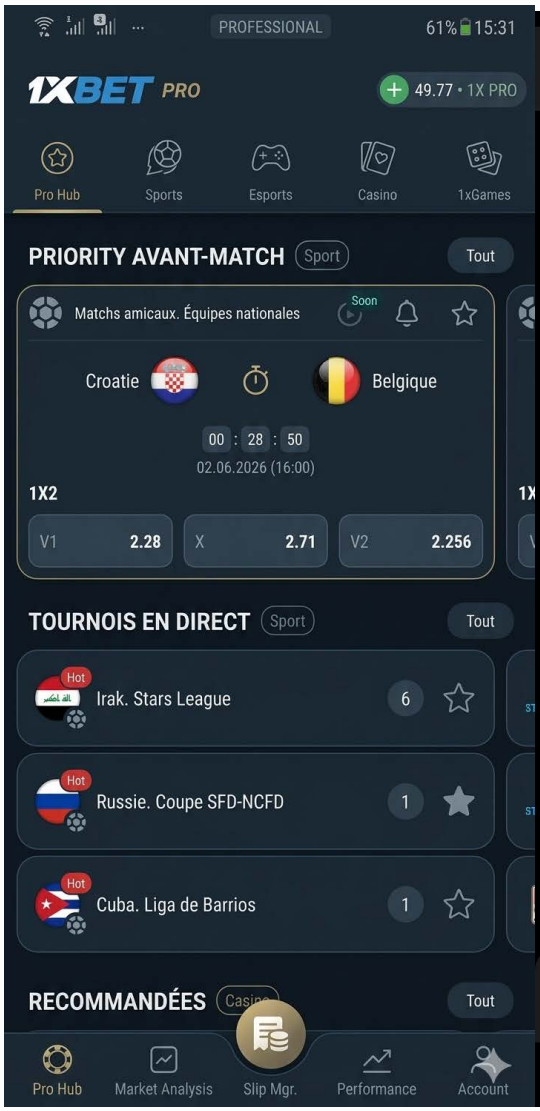
SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

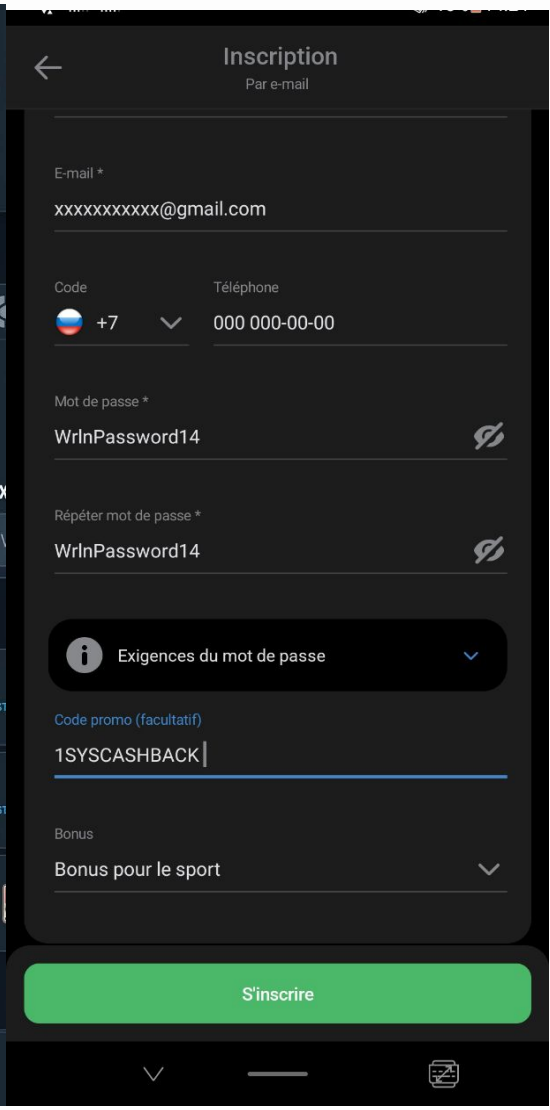
Evaluation n°1

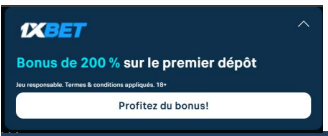
On considère la droite (Δ) d'équation cartésienne $x + 2y - 3 = 0$
1°) Précise un vecteur normal à(Δ) et un vecteur directeur de (Δ).
2°) Donne repère de(Δ).

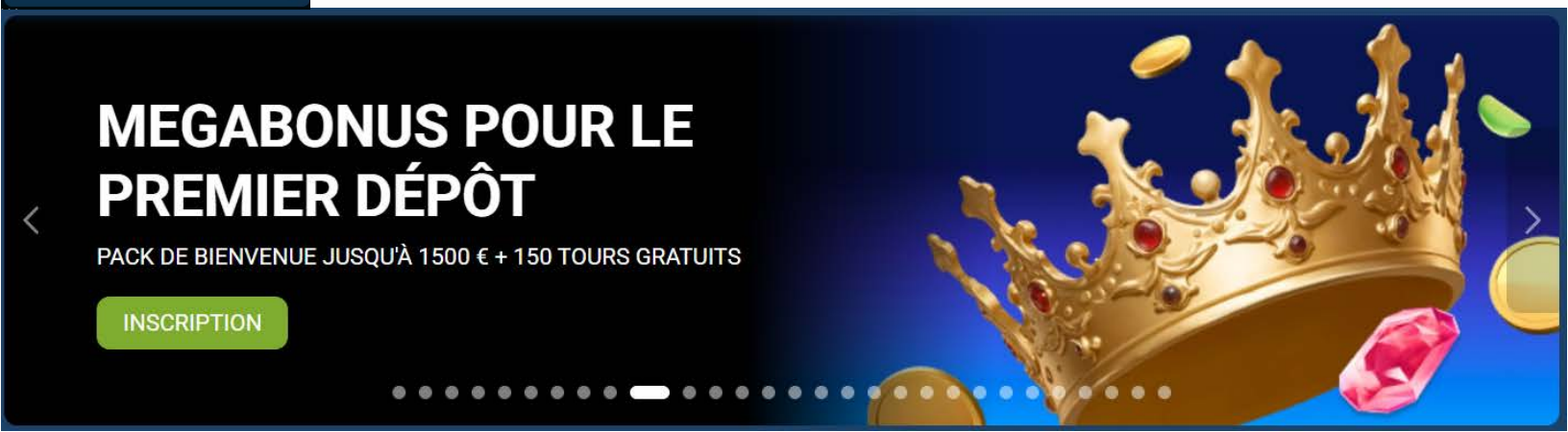

1XBET
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!


Inscription
Par téléphone
Code *
+7
Téléphone *
912 676-78-48
Devise *
Dollar américain (USD)
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
J'ai plus de 18 ans et je confirme avoir lu et accepté les conditions générales et la politique de confidentialité de la société.
J'accepte de recevoir des offres marketing et promotionnelles par téléphone
S'inscrire


PROFESSIONAL
61% 15:31
1XBET PRO
49.77 • 1X PRO
Pro Hub
Sports
Esports
Casino
1xGames
PRIORITY AVANT-MATCH
Sport
Tout
Matchs amicaux. Équipes nationales
Soon
Croatie
Belgique
00 : 28 : 50
02.06.2026 (16:00)
1X2
V1 2.28
X 2.71
V2 2.256
TOURNOIS EN DIRECT
Sport
Tout
Hot
Irak. Stars League
6
Russie. Coupe SFD-NCFD
1
Cuba. Liga de Barrios
1
RECOMMANDÉES
Casino
Tout
Pro Hub
Market Analysis
Slip Mgr.
Performance
Account


Inscription
Par e-mail
E-mail *
xxxxxxxxxx@gmail.com
Code
+7
Téléphone
000 000-00-00
Mot de passe *
WrlnPassword14
Répéter mot de passe *
WrlnPassword14
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
S'inscrire


1XBET
Bonus de 200 % sur le premier dépôt
Jeu responsable. Termes & conditions appliqués. 18+
Profitez du bonus!


MEGABONUS POUR LE PREMIER DÉPÔT
PACK DE BIENVENUE JUSQU'À 1500 € + 150 TOURS GRATUITS
INSCRIPTION

3°) Ecris de deux manières différentes une représentation paramétrique de(Δ).

Evaluation n°2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$et on considère les points $A(-1\,;3)$ et $B(2\,;1)$.
1°) Démontre que les points A et B détermine une droite notée (D).
2°) Donne un repère de (D).
3°) Détermine un vecteur normal à (D).
4°) Ecris de deux manières différentes l'équation cartésienne de (D).
5°) Calcule la distance du point $K(1\,;1)$ à la droite (D) puis conclus.

Evaluation n°3

Résous dans $\mathbb{Z}$ $puis$ $dans$ $\mathbb{R}$les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases} \text{ et } (S_2):\begin{cases} x-2y+2z-4=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases}$$

Evaluation n°4

On considère les systèmes suivants :

$$(S_1):\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=-1+2t \end{cases},t\in\mathbb{R} \text{ et } (S_2):\begin{cases} x=3-\lambda-3\mu \\ y=2\lambda+3\mu \\ z=2-2\lambda \end{cases},(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

1°) Etablis entre x, y et z une relation indépendante de t au niveau du système (S_1).

2°) Etablis entre x, y et z une relation indépendante de λ et μ au niveau du système (S_2).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

COURS

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

COURS PRESENTE SELON A.P.C.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1: ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Activité 1 : Droites orthogonales
Activité 2 : Droites et plans perpendiculaires
Activité 3 : Plans perpendiculaires
Activité 4 : Projections orthogonales
Activité 5 : Calcul de distances

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2 : SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Activité 1 : Définitions et exemples
Activité 2 : Représentations initiales
Activité 3 : Etude de la méthode du Pivot de Gauss.
Activité 4 : Systèmes dérivés

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3 : VECTEURS DE L'ESPACE

Activité 1 : Notion de vecteurs de l'espace
Activité 2 : Opérations sur les vecteurs
Activité 3 : Vecteurs colinéaires – vecteurs coplanaires
Activité 4 : Caractérisations vectorielles de droites et de plan
Activité 5 : Bases et repères

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4 : PRODUIT SCALAIRE

Activité 1 : Définition
Activité 2 : Propriétés
Activité 3 : Utilisation du produit scalaire

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°5 : GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

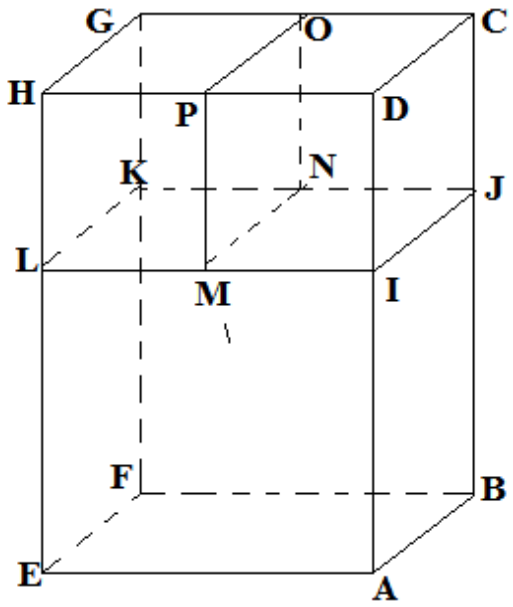
Activité 1 : Etude analytique d'un plan
Activité 2 : Etude analytique d'une droite
Activité 3 : Positions relatives de droites et de plans
Activité 4 : Calculs de distances

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D.GOSSOU

Situation de départ

Texte : Une discussion autour du dessin d'une armoire

Coffi est élève de la première. Son tuteur Fako lui demande d'aller retirer auprès du menuisier l'armoire qu'il a commandée, pour y ranger ses habits. Il dessine le plan de l'armoire sur une feuille de papier qu'il remet à Coffi pour faciliter l'identification chez le menuisier. Voici le plan de cette armoire.



Des camarades de coffi ont vu ce dessin. L'un d'eux affirme qu'on peut y trouver des traces de droites dont les parallèles sont perpendiculaires dans un même plan. Un autre affirme : « Le point A permet de repérer n'importe quel point de l'espace ; il suffit de connaître la distance AS ». Non, rétorque un autre « la distance AS seule ne suffit pas ; il faut connaître aussi le sens de A vers S sur la droite (AS)». Jean, qui jusque – là n'est pas intervenu pose la question suivante à ses camarades « S'agit – il des coordonnées géographiques d'un point ?»

Tâche : Tu vas te construire de connaissances nouvelles en mathématiques ; pour cela,

Activité 0 : Brainstorming

Consigne :

Lis attentivement le texte de la situation de départ et exprime les idées et questions qu'il t'inspire.

Jean l'un des camarades de Coffi a des difficultés relatives au sens, repérage etc.

Séquence d'apprentissage n°1: Orthogonalite dans l'espace

En examinant le dessin de l'armoire, Coffi et certains de ses camarades ont reconnu des positions relatives des droites et des plans qu'ils avaient étudiées en quatrième et seconde. Ils décident de revoir ces notions en exploitant ce dessin. Mais Ils ne se rappellent plus exactement les définitions et les propriétés qui permettent de résoudre facilement les exercices relatifs à ces notions.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Tâche : Tu vas aider Coffi et ses camarades à travers les activités suivantes.

Activité 1: Droites orthogonales

Activité 1.1 : Définition

Activité 1.1.1 : Enoncé

Consigne

1°) En examinant attentivement le dessin de la situation de départ trouve deux droites (D_1) et (D_2) telles que $(D_1) /\!/ (AB)$ et $(D_2) /\!/ (EH)$ où (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
2°) Donne deux autres exemples de droites orthogonales en utilisant le dessin.
3°) Recopie et complète la définition suivante en utilisant perpendiculaires et parallèles. puis présente une illustration schématique et donne la notation.

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque les…… à ces droites passant par un point donné sont……dans le plan qu'elles définissent

Activité 1.1.2 : Points de remarques

Consigne

.1°) Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes

- Deux droites orthogonales sont perpendiculaires
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales

2°) Démontre que deux droites perpendiculaires sont orthogonales
3°) Donne deux exemples de droites orthogonales et non perpendiculaires en utilisant le dessin de la situation de départ.
4°) Donne à présent la définition de deux droites perpendiculaires

Activité 1.2 : Propriétés

Activité 1.2.1 : Enoncés

Activité 1.2.1.1 : Propriété 1

Consigne

(D_1) et (D_2) sont deux droites orthogonales et (Δ) une droite parallèle à (D_1)
1°) Fais une figure
2-a) Justifie qu'il existe deux droites perpendiculaires (Δ_1) et (Δ_2) telle que l'une soit parallèle à (Δ).
-b) Déduis- en que (Δ) est orthogonale à (D_2).
.3°) Présente l'énoncé de la propriété P_1 que tu viens de démontrer puis écris son déductogramme

Activité 1.2.1.2 : Propriété 2

Consigne

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles et (Δ) une droite orthogonale à (D_1)
.1°) Fais une figure
.2-a) Justifie qu'il existe deux droites perpendiculaires (Δ_1) et (Δ_2) telles que l'une soit parallèle à (D_2)
-b) Déduis-en que (Δ) est orthogonale à (D_2)
.3°) Présente l'énoncé de la propriété P_2 que tu viens de démontrer puis écris son déductogramme

Activité 1.2.2 : Evaluation formative

Consigne

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs des segments$[AF]$et$[CF]$.
.1°) Justifie que AFC est un triangle équilatéral
2-a) Démontre que la droite (CI) est perpendiculaire à la droite (AF)

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-b) Déduis-en que les droites (CI) et (DG) sont orthogonales
3-a) Justifie que la droite (IJ) est parallèle à la droite (AC)
-b) Déduis-en que les droites (IJ) et (BD) sont orthogonales

Activité 2 : Droite et plans orthogonaux

Activité 2 .1 : Définition

Consigne

En t'aidant de tes acquis et des résultats de l'évaluation formative précédente, définis une droite et un plan orthogonaux

Activité 2.2 : Propriétés fondamentales

Consigne

Recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant : plan, une unique droite, un unique plan, orthogonale, une droite, deus droites sécantes

P_3 : Etant donné un point A et un plan (P), il existe……...passant par A et ……(P)
P_4 : Etant donné un point A et une droite (D) , il existe…….passant par A et …… (D)
P_5 : ……..est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à …….. de ce plan

Activité 2.3 : Propriétés

Activité 2.3.1 : Propriété 1

Consigne :

Soit (D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles et (P) un plan perpendiculaire à (D_1)
.1°) Fais une figure
.2-a) Justifie qu'il existe deux droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2) qui sont orthogonales à (D_1)
-b) Déduis-en que (D_2) est orthogonale à (P)
.3°) Présente la propriété P_6 que tu viens de démontrer puis écris son déductogramme

Activité 2.3.2 : Propriété 2

Consigne

Soit (P) et (Q) deux plans parallèles et (D) une droite orthogonale à (P)
.1°) Fais une figure
2-a) Justifie qu'il existe deux droites sécantes (Δ_1) et (Δ_2) de (P) qui sont orthogonales à (D)
-b) Justifie qu'il existe deux droites sécantes (Δ'_1) et (Δ'_2) telles que $(\Delta_1) \parallel (\Delta'_1)$ et $(\Delta_2) \parallel (\Delta'_2)$
-c) Déduis des questions a et b que la droite (D) est orthogonale au plan (Q)
.3°) Présente l'énoncé de la propriété P_7 que tu viens de démontrer puis déduis son déductogramme

Activité 2.3.3 : Propriété 3

Consigne

Soit (D_1) et (D_2) deux droites orthogonales à un même plan (P).
.1°) Fais une figure
.2 Soit A un point de (D_1) et (D_1') une droite passant par A et parallèle à (D_1)
-a) En t'aidant des propriétés précédentes, justifie que les droites (D_1) et (D_1') sont confondues
-b) Déduis-en que (D_1) et (D_2) sont parallèles
.3°) Présente l'énoncé de la propriété P_8 que tu viens de démontrer puis déduis – en son déductogramme

Activité 2.3.4 : Propriété 4

Consigne

Soit (P) et (Q) deux plans orthogonaux à une même droite (D)
.1°) Fais une figure

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

.2°) Soit A un point de (P) et (P') un plan passant par A et parallèle à (P)
-a) En t'aidant des propriétés précédentes, justifie que les plans (P) et (P') sont confondus
-b) Déduis-en que (P) et (Q) sont parallèles
3) Présente l'énoncé de la propriété P_9 que tu viens de démontrer puis écris son déductogramme.

Activité 2.3.5 : Propriété 5

Consigne

Soit (D) une droite orthogonale à un plan (P) et (Δ) une droite orthogonale à (D)
.1°) Fais une figure
.2°) Précise la position relative de la droite (Δ) et du plan (P)
.3°) Présente l'énoncé de la propriété P_{10} que tu viens d'admettre puis déduis son déductogramme

Activité 2.4 : Evaluation formative

Consigne

ABCDEFGH est un cube, I le centre du carré BCGF et J le milieu du segment $[GH]$
1-a) Démontre que la droite (FC) est orthogonale au plan (ABG)
-b) Déduis-en que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales
2-a) Démontre que la droite (BH) est orthogonale au plan (ACF)
-b) Déduis-en que les droites (BH) et (AI) sont perpendiculaires
3°) Démontre que le triangle AIJ est rectangle en I

Activité 3 : Plans perpendiculaires

Activité 3.1 : Définition

En utilisant tes acquis de quatrième, définis deux plans perpendiculaires

Activité 3.2 : Evaluation formative

Consigne

Soit ABCD un tétraèdre régulier, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$et$[CD]$
.1°) Démontre que les plans (ICD) et (ABC) sont orthogonaux
.2°) Démontre que les plans (ICD) et (JAB) sont orthogonaux

Activité 4 : Projections orthogonales

Activité 4.1 : Projections orthogonales sur un plan

Activité 4 .1.1 : Définition

Consigne 1

.1°) Recopie puis complète la définition suivante en utilisant droite et plan
On appelle projection orthogonale sur un plan (P) et l'on note p l'application qui a tout point M de l'espace associe le point M', l'intersection…….avec……. passant par M et orthogonale……
.2°) Donne une illustration graphique de cette définition en utilisant un point et son image

Activité 4.1.2 : Propriétés

Consigne

Soit p la projection orthogonale sur un plan (P)
Recopie puis complète les propriétés suivantes : un singleton, une droite, le plan lui-même, est orthogonale, n'est pas orthogonale, sont parallèles, ne sont pas parallèles tout en illustrant chaque propriété par un schéma

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

.1°) L'ensemble des points invariants (points fixes) par une projection orthogonale sur un plan est…….
.2°) L'image d'une droite par p est
-a)…….si (D) n'est pas orthogonale à (P)
-b)…….si (D) est pas orthogonale à (P)
3°) Si A et B sont deux points d'images respectifs A' et B' par la projection orthogonale p le segment $[AB]$ a pour image par p
-a) $[A'B']$ si …….

-b) $\{A'\}$ si…….
-c) De plus A'B' = AB si la droite (AB) et (P) sont…… et A'B'<AB si la droite (AB) et (P) sont …….
.4°) L'image du milieu d'un segment par une projection orthogonale sur un plan (P) dont le support ……..est le milieu du segment image

Activité 4.2 : Projections orthogonales sur une droite

Activité 4.2.1 : Définition

Consigne

Recopie puis complète la définition suivante en utilisant droite, plan et espace
On appelle projection orthogonale sur une droite (D) l'application qui à tout M de ……. Associe le point d'intersection M' de …… et…… orthogonale à ……passant par M

Activité 4.2.2 : Propriétés

Consigne

Recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant : droite, un singleton, est orthogonale, n'est pas orthogonale
Soit p une projection orthogonale sur une droite (D)
.1°) L'ensemble des points invariants par p est ……
.2°) L'image par p d'une droite orthogonale à (D) est …….
.3°) L'image d'une droite non orthogonale à (D) est……
.4°) L'image du milieu d'un segment dont le support…… à (D) est le milieu de l'image de ce segment

Activité 4 .3 : Evaluation formative

ABCDEFGH est un pavé droit reposé sur la face ABCD et le plan vu de face est (ABE). I et J sont les milieux respectifs des segments $[AE]$et$[EF]$. On désigne par p_1 la projection orthogonale sur la droite (AB)
.1-a)) Précise l'ensemble des points invariants par p_1
-b) Détermine l'image de chacun des points E , F , G, H ; I et J par p_1
2) On désigne par p_2 la projection orthogonale sur le plan (ABC).
-a) Détermine L'image par p_2 des points A, B, C et D
-b) Détermine l'image par $p_2$des points E, F, I et J noté respectivement E', F', I' et J'
-c) Détermine l'image par p_2 des segments $[EI]$et$[IJ]$
-d) Détermine la nature de l'image par p_2 du triangle EIJ

Activité 4.3 : Calcul de distance

Activité 4.3.1 : Distance d'un point à un plan

Consigne :

En utilisant tes acquis, recopie puis complète la définition suivante :
(P) est un plan et A est un point de l'espace. On appelle distance du point A au plan (P) notée d (A ; P) la distance AH où H est le point……. de (P) avec la droite passant par A et ……à (P).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Activité 4.3.2 : Distance d'un point à une droite

Consigne

En utilisant tes acquis, recopie puis complète la définition suivante :
(D) est une droite et A est un point de l'espace. On appelle distance du point A à la droite (D), notée d (A ; D), la distance AH où H est le point …… de (D) avec le plan passant par A et ……à (D).

Activité 4.3.3 : Evaluation formative

Consigne

ABCDEFGH est un cube d'arête a où a est un nombre réel strictement positif.
1°) Démontre que la droite (FC) est orthogonale au plan (ABG).
2°) Calcule en fonction de $a$la distance du point C au plan (ABG).
3°) Calcule en fonction de a la distance du point C à la droite (EF).
4°) Quelle est la distance du point H au plan (ABG) ?

Fin de l'apprentissage

Séquence d'apprentissage n°2: Systemes d'equations lineaires

Les principales matières qui sont entrées dans la fabrication de l'armoire sont le bois, le clou et le vitre. Sur le marché, le bois est vendu en madrier, le clou en sachet et le vitre en mètre carré. Les contraintes du marché exigent au menuisier les possibilités de choix suivantes :

- ✓ S'il choisit trois madriers, cinq sachets, et deux mètres carrés, li dépense 17750F
- ✓ S'il choisit deux madriers, quatre sachetset trois mètres carrés il dépense 18100F.
- ✓ S'il choisit quatre madriers, trois sachets et deux mètres carrés il dépense 18950F.

Sachant la confection de l'armoire nécessite deux madriers, un sachet de clous et deux mètres carrés de vitre, le menuisier veut connaître le prix d'un madrier de bois, d'un sachet de clou et d'un mètre carré de vitre afin de connaître la dépense nécessaire relative aux principales matières qui entrent dans la fabrication de l'armoire. Confronté à des difficultés, il sollicite ton aide.

Tâche : Tu vas aider le menuisier travers les activités suivantes.

Activité 1 : Définitions et exemples

Consigne

En utilisant tes acquis, définis :
1°) Une équation linéaire dans $\mathbb{R}^3$puis propose trois exemples
2°) Définis un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$puis propose trois exemples.

Activité 2 : Représentations initiales

Consigne

1°) Traduis les hypothèses de relatives aux contraintes du marché par un système de trois équations à trois inconnues.
2°) Résous ce système.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3-a) Précise le prix de chaque matière première.
-b) Calcule alors la dépense du menuisier relative à la fabrication de l'armoire.

Activité 3 :Etude de la méthode du Pivot de Gauss.

On considère le système d'équations linéaires suivant.

$$(\sum): \begin{cases} x-5y-7z=2 \\ 5x+3y+z=-10 \\ 3x+y-2z=-7 \end{cases}$$

On se propose de résoudre ce système par la méthode du Pivot de Gauss. Pour cela,

Activité 3.1 : Résolution d'un système échelonne.

Consigne :

Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système (s) $\begin{cases} x-5y-7z=3 \\ -7y-9z=3 \\ z=2 \end{cases}$

Activité 3.2 : Mise en œuvre de la méthode du pivot de Gauss

Exposé :

Pour résoudre un système de trois équations à trois inconnues par la méthode du pivot de Gauss.

- On élimine la variable x dans les deux dernières équations avec combinaison de la première équation et on obtient un nouveau système (S').
- On élimine la variable y dans la dernière équation du système (S') avec combinaison des deux dernières équations du système (S') et on obtient un système échelonné directement à résoudre.

Consigne :

1°) En appliquant les instructions de cet exposé détermine le système échelonné qui dérive du système de l'activité 2-2-2-1

2°) Déduis les solutions de ce système en t'aidant de l'activité 2-2-2-2-1

Activité 3.3: Evaluation formative

Consigne :

En utilisant la méthode du pivot de gauss, résous le système suivant :

$$(S): \begin{cases} 2x-3y+z=6 \\ x-2y-2z=1 \\ 3x+y+z=3 \end{cases}$$

Activité 3.4: - Utilisation de la méthode du pivot de Gauss : résolution de problème.

Consigne :

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Détermine une équation cartésienne du cercle passant par les points $A\,(-2\,;\,8)\,;\,(6\,;\,8)\;et\;C\,(4\,;\,4)$

Activité 4 : Systèmes dérivés

Activité 4.1 : Exemple de résolution d'un système de trois équations à deux inconnues.

Consigne

On se propose de résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \\ x+2y=0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2): \begin{cases} x+y=2 \\ 2x-y=1 \\ x-y=0 \end{cases}$$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1-a) Forme à partir du système (S_1) le nombre de systemes de deux équations à deux inconnues possibles.

-b) Résous au choix un des systèmes obtenus.

-c) Vérifie l'autre équation ne se trouvant pas dans le système choisi en utilisant les solutions du système choisi.

-d) Le système (S_1) admet – il de solutions dans $\mathbb{R}^2$?

-e) Propose alors un retenons pour la résolution d'un système de trois équations à deux inconnues.

2°) En utilisant le retenons ci – dessus, résous le système (S_2)

Activité 4.2 : Exemple de résolution d'un système de deux équations à trois inconnues

Consigne

On se propose de résoudre le système suivant : (S) : $\begin{cases} 2x + 5y - 6z = 8 \\ x + y - 6z = 1 \end{cases}$

1°) En considérant l'une des trois inconnues comme paramètre réel, résous ce système devenu désormais un système de deux équations à deux inconnues.

2°) Propose un retenons pour la résolution d'un tel système.

Fin de l'apprentissage

Séquence d'apprentissage n°3: Vecteurs de l'espace

Jean l'un des camarades de Coffi a des difficultés relatives au sens, repérage etc.

Tâche : Tu vas l'aider à travers les activités suivantes

Activité1 : Notion de vecteurs de l'espace

Activité1.1 : Caractérisation d'un vecteur

Consigne

.1°) En utilisant tes acquis, donne les caractéristiques d'un vecteur

.2°) En prenant des caractéristiques de ton choix, représente un vecteur

.3°) En examinant le dessin de l'armoire, donne les caractéristiques des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$

Activité 1.2 : Propriété

Consigne

.1°) Recopie et complète la propriété suivante en utilisant unique point M et représentant

Pour tout point O et pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un ……..tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. On dit que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est …… du vecteur $\vec{u}$

.2) En examinant attentivement le dessin de l'armoire,

-a) donne deux représentants du vecteur $\overrightarrow{EB}$.

-b) donne trois représentants du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Activité 2 : Opérations sur les vecteurs

Activité 2.1 : Définitions

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Consigne

.1°) Recopie puis complète les définitions suivantes en utilisant $\vec{u}+\vec{v}$et k$\vec{u}$

Soit $\mathscr{W}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace.

D_1 : On appelle somme de deux vecteurs de l'espace toute application de $\mathscr{W}\times\mathscr{W}$ dans $\mathscr{W}$ qui aux vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$ associe le vecteur……..

D_2 : On appelle produit d'un vecteur de l'espace par un nombre réel toute application de $\mathbb{R}\times\mathscr{W}$ dans $\mathscr{W}$ qui a tout vecteur $\vec{u}$ associe le vecteur……

Activité 2.2 : Propriétés

Consigne

En utilisant tes acquis, recopie puis complète les propriétés suivantes

Pour tous vecteurs $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace et pour tous nombres réels λ etμ on a :

P_1 : $\vec{u}+\vec{v}=$ …….. P_5 : $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=$……

P_2 :$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=$……. P_6 :$1\vec{u}=$……

P_3 :$(\lambda+\mu)\vec{u}$ =…… P_7 :$\|\lambda\vec{u}\|=$……

P_4 : $\lambda(\mu\vec{u})=$…….. P_8 :$\|\vec{u}+\vec{v}\|=$……..

.2°) Recopie puis complète la propriété suivante puis reconnais cette propriété

Pour tous points A, B et C de l'espace, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$…….

Activité 3 : Vecteurs colinéaires-vecteurs coplanaires

Activité 3.1 : Définitions

Consigne

Recopie puis complète les définitions suivantes en utilisant coplanaires, vecteur nul, même direction, non coplanaires

D_1 : Deux vecteurs de l'espace sont dits colinéaires lorsque l'un d'eux est ……ou lorsque les deux vecteurs ont…….

D_2 : On dit que trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ de l'espace sont dits……. si étant donné un point O de l'espace et les points A, B et C définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, OB = $\vec{v}$ et $OC=\vec{w}$, les points O, A , B et C sont…….

D_3 : On dit que trois vecteurs $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ de l'espace sont dits……. si étant donné un point O de l'espace et les points A, B et C définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, OB = $\vec{v}$ et $OC=\vec{w}$, les points O, A , B et C sont…….

Activité 3.2 : Propriétés

Consigne

Recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant $(0,0,0)$, combinaison linéaires

Soit $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ trois vecteurs de l'ensemble $\mathscr{W}$ des vecteurs de l'espace et α,β,γ des nombres réels.

P_1 : Si $\vec{u}$ et$\vec{v}$ sont non colinéaires, alors $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ est……de $\vec{u}$ et$\vec{v}$

P_2 :$\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe……..de ces trois vecteurs égale aux vecteurs nuls sans que ses coefficients soient tous nuls.

P_3 : $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet (α,β,γ) de nombres réels tels que $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ est…….

Activité 3.3 : Evaluation Formative

Consigne

ABCDEFGH est un cube et on pose :

$\overrightarrow{AB}=\vec{\imath}, \overrightarrow{AD}=\vec{\jmath}, \overrightarrow{AE}=\vec{k}, \vec{u}=\vec{\imath}+\vec{k}, \vec{v}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$et $\vec{w}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

.1°) Justifie que les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$et $\vec{k}$ sont non coplanaires

.2-a) Exprime $\vec{v}\ et\ \vec{w}$ en fonction de $\vec{u}\ et\ \vec{\jmath}$

-b) Déduis – en que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont coplanaires

.3°) Démontre que les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$ sont non coplanaires.

Activité4 : Caractérisations vectorielles de droites et de plans de l'espace

Consigne

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et M un point quelconque de l'espace

.1°) Démontre que $[M \in (AB)] \Leftrightarrow \left(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}\right)$

.2°) Démontre que $[M \in (ABC)] \Leftrightarrow \left(\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}\right)$

Activité 5 : Bases et repères

Activité 5.1 : Définition

Consigne

On rappelle que deux vecteurs non colinéaires définissent une base du plan et un triplet composé de deux vecteurs non colinéaires et d'un point du plan est un repère du plan.

En t'aidant de ce rappel et de tes connaissances définis

1°) Une base de l'espace.

2°) Une base orthonormée de l'espace.

3°) Un repère de l'espace.

4°) Un repère orthonormé.

Activité 5. 2: Propriété

Consigne

L'espace est rapporté au repère $(0,\vec{\imath},\vec{J},\vec{k})$

I, J et K sont des points de l'espace tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}, \overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}, \overrightarrow{OK} = \vec{k}$ et $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'ensemble des vecteurs de $\mathscr{V}$tels que pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

1°) On suppose que M appartient à la droite (OK).

Démontre qu'il existe un seul triplet (a,b,c) de nombres réels tel que$\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

2°) On suppose que M appartient au plan (OIJ).

Démontre qu'il existe un seul triplet (a,b,c) de nombres réels tel que $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

3°) On suppose maintenant que M n'appartient ni à la droite (OK), ni au plan (OIJ) .

-a) Justifie que la droite (Δ) passant par M et parallèle à (OK) est sécante au plan (OIJ) en un point P.

-b) Justifie que le plan passant par M et parallèle à (OIJ) est sécant à la droite (OK) en un point Q.

-c) Démontre qu'il existe un seul triplet (a,b,c) de nombres réels $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$

4°) Déduis de tout ce qui précède l'énoncé de la propriété que tu viens de démontrer.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Fin de l'apprentissage

Séquence d'apprentissage n°4: Produit scalaire

Le produit scalaire est un outil de calcul vectoriel faisant partir des principes utilisés par l'ingénieur PIKO dans la réalisation du pont de Codji. Reed, un fils de l'ingénieur PIKO en terminale scientifique n'arrive pas à comprendre l'utilité des produits scalaires dans la réalisation d'un pont.

Tâche : Tu vas aider Reed à travers les activités suivantes.

Activité 1 : Définition

Activité 1.1. : Enoncé

Consigne

Recopie puis complète les définitions suivantes en utilisant nul et non nul.

$\vec{u}\ et\ \vec{v}$sont deux vecteurs et A, B, C des points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ et on note $\vec{u}\ .\vec{v}$ le nombre réel défini par :

- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}\ ou\ \vec{v}$ est ……
- ✓ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}\| cos\widehat{BAC}$ si et seulement si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$sont…….

Activité 1.2 : Conséquences immédiates de la définition

Consigne :

$\vec{u}\ et\ \vec{v}$sont deux vecteurs non nuls.

1-a) Démontre que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

-b) Déduis – en que $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

2°) Démontre que $(\vec{u}.\vec{v} = 0) \Leftrightarrow (\vec{u} \perp \vec{v})$

Activité 1.3 : Evaluation formative

Consigne

On considère les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}\ tels\ que\ \|\vec{u}\| = \sqrt{2},$

$\|\vec{v}\| = 2\ \ et\ \|\vec{w}\| = 2\sqrt{2}, mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{6}\ , mes(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \frac{\pi}{2}$

Calcule $\vec{u}^2, \vec{u}.\vec{v}\ ,\ \vec{u}.\vec{w}\ ,\ \vec{v}.\vec{w}$

Activité 2 : Propriétés

Activité 2.1 : Propriétés algébriques

Consigne

$\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont trois vecteurs et k un nombre réel.

1-a) Démontre que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

-b) Démontre que $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$

2°) Démontre les propriétés suivantes :

$P_3 : \vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$P_4 : (\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$

$P_5 : (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$

$P_6 : (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$

$P_7 : (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Activité 2.2 : Propriété analytique

NB : On applique cette propriété dans le cas où la base est orthonormée

Consigne

On considère une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et les vecteurs $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$

1-a) Exprime $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ en fonction de $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$

-b) Démontre que $\vec{u}\ .\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

-c) Déduis – en que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

2°) On désigne par $A(x_A, y_{A,}, z_A)\ et\ B(x_B, y_B, z_B)$ dans le repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Démontre que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.ul$ où *ul* désigne l'unité de longueur.

Activité 2.3 : Evaluation formative

Consigne

On considère dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$les vecteurs $\vec{a}(0; 3; 4)$
$\vec{b}(-4; 0; -3), \vec{c}(-1; 0; 0)$et les points P$(-1; 1: -1)$ et Q$(2: 1: 1)$
1°) Calcule $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\| et\ PQ$
2°) Calcule $\vec{a}.\vec{b}$, $\vec{a}.\vec{c}$, $\vec{a}.(\vec{b} - \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b})^2$, $(\vec{a} - \vec{b})^2$ et $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})$

Activité 3 : Utilisation du produit scalaire

Activité 3.1: Equation cartésienne d'une sphère.

Activité 3.1.1. : Propriétés

Consigne

L'espace est muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).
On désigne par $(\mathcal{S})$ la sphère de centre $\Omega(a\ , b\ , c)$ et de rayon.
1°) Démontre que pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace,
$[M \in (\mathcal{S})] \Leftrightarrow [(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2]$
2-a) Démontre que la relation $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ peut s'écrire sous la forme $x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$
-b) Déduis – en les formules permettant de déterminer le rayon et les coordonnées du centre d'une sphère dont on connaître son équation cartésienne.

Activité 3.1.2 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est muni du repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$).
On considère les points $A(3; -1; 0), B(1; 5; 3)$ et l'ensemble (Γ) défini par : $(\Gamma) = \{M(x, y, z)\epsilon\varepsilon / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5 = 0$
1°) Détermine l'équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB].
2°) Démontre que l'ensemble (Γ) est une sphère dont tu préciseras les éléments caractéristiques.

Activité 3.2 : Equation cartésienne de plan

Activité 3.2.1 : Propriétés

Consigne

A et B sont deux distincts de l'espace.
En utilisant tes connaissances, reconnais les ensembles suivants.
1°) (Γ_1) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$
2°) (Γ_2) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$

Activité 3.2.2 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et on considère les points
$A(1;\ -2; 3)\ et\ B(-3; 1;\ -2)$.
On considère les ensembles (Γ_1) et (Γ_2) définis par :
(Γ_1) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 0$
(Γ_2) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Détermine l'équation cartésienne de (Γ_1) et (Γ_2).

Activité 3.3 : Positions relatives d'une sphère et d'un plan

Consigne

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) et on considère la sphère (S) de centre $I(2\,;-1\,;1)$ et de rayon $r = 3cm$ et le plan (P) d'équation cartésienne $x - 2y + 2z + 3 = 0$.

1°) On désigne par H le projeté orthogonal de I sur le plan (P).

-a) Calcule la distance du point I au plan (P).

-b) Compare IH et r

-c) Déduis – en la nature et les éléments caractéristiques de (P)⋂(S)

2°) En t'inspirant de la question 1, détermine l'intersection de la sphère et du plan dans les cas suivants :

-a) $(P): x + y + z - 4 = 0 \;\; et \;\; (S): x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z + 2 = 0$

-c) $(P): x - 2y + z + 1 = 0 \;\; et \;\; (S): x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 4z + 9 = 0$

Activité 3.4 : Positions relatives d'une sphère et d'une droite

Consigne

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) et on considère la sphère (S) de centre $I(-1\,;2\,;1)$ et de rayon $r = 3cm$. (Δ) est la droite de repère $(A,\vec{u})$ où $A(2;\,-3\,;1)$ et $\vec{u}(1\,;5\,;\,-3)$

1°) On désigne par H le projeté orthogonal de I sur la droite (Δ).

-a) Détermine une équation cartésienne du plan passant par I et orthogonal à la droite (Δ)

-b) Détermine les coordonnées du point H.

-c) Calcule la distance du point I à la droite (Δ)

-d) Compare IH et r puis déduis – en l'intersection de la droite (Δ) *et de la sphère* (S).

2°) En t'inspirant des questions précédentes, détermine l'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) dans les cas suivants :

-a) (Δ) a pour repère $(A\,,\;\vec{u})$ où $A(1\,;2\,;\,-1)$ *et* $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ puis (S) a pour centre $I(-1\,;0\,;3)$ $et\; r = 3$

-b) (Δ) a pour repère $(A\,,\;\vec{u})$ où $A(1\,;2\,;\,-1)$ *et* $\vec{u}(1\,;1\,;1)$ puis (S) a pour centre $I(-1\,;0\,;3)$ $et\; r = 2\sqrt{6}$.

Activité 3.5 : Positions relatives de deux sphères

Consigne

1°) En utilisant tes acquis, présentes les propriétés caractérisant les différentes positions relatives deux cercles de centres distincts $\Omega\; et\; \Omega'$ et de rayons respectifs $r\; et\; r'$.

2°) L'espace est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) . En utilisant ces propriétés détermine l'intersection de deux sphères (S) et (S') dans les cas suivants :

-a) $\Omega(2\,;\,-1\,;1), \Omega'(-2\,;\,-5\,;\,-3), r = \sqrt{3}\; et\; r' = 3\sqrt{3}$

-b) $\Omega(1\,;\,0\,;-1), \Omega'(1\,;\,2\,;\,1), r = \sqrt{2}\; et\; r' = 1$

-c) $\Omega(-2\,;\,1\,;-1), \Omega'(-3\,;\,-1\,;\,1), r = 3\; et\; r' = 2$

Activité 3.6 : Exemple d'étude de ligne de niveaux

Consigne

Soit dans l'espace $\mathscr{E}$ deux points A et B. On considère l'application f de $\mathscr{E}$dans $\mathbb{R}_+$ qui, à tout point M de $\mathscr{E}$, associe le nombre réel positif $f(M) = 2MA^2 + MB^2$. G est le point de l'espace défini par :

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1°) Vérifie que $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{O}$

2°) Démontre que $f(G) = \frac{2}{3}AB^2$

3°) Démontre que $f(M) = 3MG^2 + \frac{2}{3}AB^2$.

4°) Démontre que f présente un minimum sur $\mathscr{E}$ à préciser.

5°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $f(M) = 72\ et\ AB = 6cm$

6°) En t'inspirant des questions précédentes, résous dans l'espace $\mathscr{E}$ les équations géométriques suivantes où $AB = 5cm$

$(E_1) : MA^2 + MB^2 = 25$

$(E_2) : -3MA^2 + MB^2 = 37{,}5$

$(E_3) : -MA^2 - 3MB^2 = -20$

Fin de l'apprentissage

Séquence d'apprentissage n°5: Geometrie analytique de l'espace

Dans cette séquence Aziz un camarade de Coffi se propose d'étudier analytiquement les droites et les plans de l'espace à travers une série d'activités que son professeur de mathématiques lui a proposées

Tache:Tu vas mener cette étude à la place de Aziz à travers les résultats de ces différentes activités

Activité 1 : Etude Analytique d'un plan

Activité 1.1 : Représentation paramétrique

Activité 1.1.1: Définitions

Activité 1.1.1.1: Repère de plan

Consigne

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espaces ($\mathscr{P}$) un plan de l'espaces et M_o de l'espaces.

En utilisant tes acquis recopie puis complètes la définition suivante en utilisant point ; vecteurs directeurs ; triplet

On appelle repère du plan ($\mathscr{P}$) le ……$(M_o, \vec{u}, \vec{v})$où sont des …….et M_o un ……du plan ($\mathscr{P}$).

Activité 1.1.1.2 : Représentation paramétrique

Consigne

L'espace est rapporté au repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). On considère le point $M_o(x_o;\ y_o;\ z_o)$ de ce repère et les vecteurs $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(a', b'c')$de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où $a, b, c, a', b' et\ c'$ sont des nombres réels et le plan ($\mathscr{P}$) de repère $(M_o, \vec{u}, \vec{v})$.

1°) Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

-a) Démontre que [M∈ ($\mathscr{P}$)]⇔$\left[\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \overrightarrow{M_OM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\right]$

-b) Déduis – en l'expression de $x, y\ et\ z$ en fonction de $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta, x_0, y_0\ et\ z_0$sous forme de système.

CONCEPTION DU PROFESSEUR TITOPHILE D. GOSSOU

2°) Dis ce que représente ce système pour le plan ($\mathscr{P}$)
3°) Définis alors la représentation paramétrique d'un plan

Activité 1.1.2 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est rapporté au repère (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)
On considère les points A (-1,2,1), B(-2,-3 ,2) C(1,-1,1) et l'ensemble E définis par:

$$\begin{cases} x = 2t - r + 1 \\ y = -t + 3 \qquad (t,r) \in \mathbb{R}^2 \\ z = r \end{cases}$$

1-a) Justifie que les points A, B et C déterminent un plan (Q).
-b) Donne un repère de ce plan.
-c) Ecris un système d'équations paramétriques du plan (Q).
2°) Détermine la nature de l'ensemble E.

Activité 1.2. Equation cartésienne d'un plan.

Activité 1.2. 1 : Vecteur normal à un plan

Activité 1.2.1.1 : Définition

Consigne

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$deux vecteurs directeurs d'un plan (P) et $\vec{n}$un vecteur de l'espace.
En utilisant tes connaissances relatives à la notion de droite et plan orthogonaux définis un vecteur normal (orthogonal) à un plan.

Activité 1.2.1.2 : Point de remarques

Consigne

En utilisant tes connaissances, recopie puis complète les points de remarque suivants :
R1$\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan (P) si et seulement si il est vecteur directeur d'une droite (D)…….à (p)
R2 : Si$\vec{n}$ est un vecteur normal à un plan (P) et M, N sont des points de (P) , alors $\vec{n}$ est ……à $\overrightarrow{MN}$.
R3 Un plan possède…… de vecteur normaux tous colinéaires

Activité 1.2.1.3 : Propriétés

Consigne :

1°) Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$un vecteur de l'ensemble de vecteur de l'espace.
Démontre qu'il existe un plan et un seul passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.
2°) Soit (P) un plan ,$\vec{n}$ un vecteur normal à (P) et A un point de (P).
Démontre que pour tout M de l'espace, on a:$[M \in (P)] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

Activité 1-2-1-4 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)et on considère les vecteurs$\vec{u}(-2; 1; 2)$ et $\vec{v}(-1; 3; 1)$
1°) Démontre que les vecteurs$\vec{u}$ et $\vec{v}$dirigent un plan noté (P).
2°) Détermine trois vecteurs normaux aux plan (P).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Activité 1.2.2: Equation cartésienne d'un plan.

Activité 1.2.2.1: Propriété

Consigne

L'espaces et mini d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$)

1°) Soit (P) le plan de l'espace passant par $A_o(x_o;\ y_o;\ z_o)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ où a,b,c sont des nombres réels non tous nuls.Démontre que pour tout point $M(x,y,z)$ de l'espace, on a:$[M \in (P)] \Leftrightarrow (\exists d \in \mathbb{R}/ax+by+cz+d=0)$.

2°) Soit $a,b\ et\ c$ des nombres réels tel $(a,b,c) \neq (0;0;0)$. Recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant l'équation cartésienne et équation.

P_1 : Tout plan de vecteurs normal$\vec{n}(a,b,c)$ a une ……..$de\ la\ forme\ ax+by+cz+d=0$

P_2 : Toute…… de la forme $ax+by+cz+d=0$ est …….d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$

Activité 1. 2.2.2 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) et on considère le plan (P) passant par $A(2;1;0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et l'ensemble (Q) d'équation cartésienne $2x-3y+z-1=0$

1°) Détermine une équation cartésienne de (P).

2°) Justifie que (Q) est un plan

Activité 1.3 : Représentation paramétrique et équation cartésienne.

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère les plans(P) et (Q) définis par :

(P):$\begin{cases} x=2t-q+1 \\ y=p+q-2 \\ z=3q+q+3 \end{cases}$ (p,q)$\in \mathbb{R}^2$ et(Q) : $x+2y-3z+5=0$

1°) Détermine une équation cartésienne de (P).

2°) Détermine une représentation paramétrique de (Q)

Activité 1.4. : Distance d'un point à un plan

Activité 1.4.1. : Propriété

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$)

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $M_o(x_o;\ y_o;\ z_o)$ un point de l'espace où $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

On se propose d'établir la formule permettant de calculer la distance du point M_o au plan (P). Pour cela, on désigne par H(x,y,z) le projeté orthogonal de M_o sur le plan (P)

1°) Démontre que $\left\|\overrightarrow{M_oH}\right\| \times \|\vec{n}\| = \left|\overrightarrow{M_oH}.\vec{n}\right|$

2°) Démontre que $\overrightarrow{M_oH}.\vec{n} = -(ax_0+by_o+cz_o+d)$

3°) Déduis-en l'expression de la distance du point M_o au plan (P).

Activité 1.4.2. Evaluation formative

Consigne

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère les plans (P) et (Q) et le point A définis par : (P): $2x-2y+z-5=0$, (Q): $\begin{cases} x=2\lambda+2\mu+2 \\ y=3\lambda \\ z=-\mu \end{cases}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $A(1;-2\,;1)$

1°) Calcule la distance du point A au plan (p)
2°) Calcule la distance du point A au plan (Q)

Activité 2: Etude analytique d'une droite

Activité 2.1: Représentation paramétrique d'une droite

Activité 2.1.1 : Définitions

Activité 2.1.1.1 : Repère d'une droite

Consigne

En utilisant tes acquis, récopie puis complète la définiion suivante en utilisant point, vecteur directeur, couple.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espaces,(Δ)une droite de l'espace et M_o un point de l'espace .

On appelle repère de la droite (Δ)le …..ou$\vec{u}$est un ……et M_o un ……de la droite (Δ)

Activité 2.1.1.2 : Représentation paramétrique

Consigne

L'espace est rapporté au repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère le point $M_o(x_o;\ y_o;\ z_o)$ de ce repère et le vecteur$\vec{u}(a,b,c)$de la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ où $a,b\ et\ c$ sont des nombres réels et le plan (Δ) de repère $(M_o,\vec{u})$.

1°) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

-a) Démontre que [M∈(Δ)]⇔$\left[\exists t\in\mathbb{R}\ /\overrightarrow{M_oM}=t\vec{u}\right]$

-b) Déduis – en l'expression de $x,y\ et\ z$ en fonction de $a,b,c,t,x_0,y_0\ et\ z_0$sous forme de système.

2°) Dis ce que représente ce système pour la droite (Δ)

3°) Définis alors la représentation paramétrique d'une droite.

Activité 2.1.2 : Evaluation

Consigne

L'espace est rapporté au repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère les points A(1 ; 2 ; -1), B(-1 ; -1 ; 1), C (2 ; -3 ;1) et l'ensemble (Δ)définis par : $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=2 \end{cases}$

1-a) Donne un repère de la droite (AB)

-b) Détermine un système de d'équation paramétrique de la droite (AB)

2°) Détermine la nature de (Δ)

Activité 2.2 : Système d'équations cartésiennes

Activité 2.2.1 : Définition

Consigne

On rappelle qu'une droite dans l'espace est l'intersection de deux plans. On désigne par (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) où les plans (P) et (Q) ont pour équations respectives $ax+by+cz+d=0\ et\ a'x+b'y+c'z+d'=0$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) En t'aidant de ce rappel et de tes connaissances définis le système d'équations cartésiennes d'une droite.
2°) Donne trois exemples d'un système d'équations cartésiennes d'une droite.

Activité 2.2.2: Propriétés

Consigne

Recopie puis complète les propriétés suivantes en utilisant système droite et plan.
P_1 : Toute ……de l'espace est caractérisée par un …… de deux équations cartésiennes de ……de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = o \\ a'x + b'y + c'z + d' = o \end{cases}$
P_2 : si $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$sont des équations cartésiennes de deux ……..sécants alors $\begin{cases} ax + by + cz + d = o \\ a'x + b'y + c'z + d' = o \end{cases}$ est un ……d'équations cartésiennes de la ……..d'intersection de ces deux ……..

Activité 2.2.3 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et on considère les systèmes suivants :(S_1) :$\begin{cases} x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$; (S_2) :$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ -x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$; (S_3) : $\begin{cases} x + z = -3 = 0 \\ -x + y + 2z - = 0 \end{cases}$

Détermine parmi ces systèmes ceux qui sont des systèmes d'équations cartésiennes d'une droite.

Activité 2.3 : Représentation paramétrique et système d'équations cartésiennes.

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$)et on considère la droite (Δ_1) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 3, t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$ et la droite (Δ_2) d e système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x + 2y + 2z - 4 = O \\ x - y + 2z - 1 = O \end{cases}$.
1°)Détermine un système d'équation cartésienne de(Δ_1).
2°) Détermine une représentation paramétrique de(Δ_2).

Activité 3 : Positions relatives de droites et de plans de l'espace.

Activité 3.1 Positions relatives de deux droites

Activité 3.1.1 Propriétés

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et on considère les droite (Δ) et (Δ') de repères respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$
1°) En utilisant tes acquis, rappelle les différentes positions relatives de deux droites de l'espace.
2°) En utilisant les points A et B puis les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ recopie puis complète les propriétés suivantes caractérisant chacune des différentes positions énumérées ci – dessus.
P_1 : (Δ) et (Δ') sont parallèles si et seulement si ……
P_2 : (Δ) et (Δ') sont sécants si et seulement si ……

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

P3 : (Δ) et (Δ') sont coplanaires si et seulement si ……
P4 : (Δ) et (Δ') sont non coplanaires si et seulement si ……
P5 : (Δ) et (Δ') sont orthogonales si et seulement si ……

Activité 3.1.2 : Evaluation formative

Consigne

On considère les droites $(\Delta_1), (\Delta_2)\ et\ (\Delta_3)$ de représentations paramétriques respectives :

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t \\ z = -2t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 2p \\ y = 2 - 4p \\ z = 2 - 2p \end{cases}; (p \in \mathbb{R})$; $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2r \\ z = -1 + 4r \end{cases}, (r \in \mathbb{R})$

1°) Démontre que les droites $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_3)$sont strictement parallèles
2°) Démontre que les droites $(\Delta_2)\ et\ (\Delta_3)$sont sécants en point A dont on calculera les coordonnées.
3-a) Démontre que les droites $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_2)$ sont non coplanaires.
-b) Démontre que les droites $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_2)$ sont orthogonales.

Activité 3-2 : Positions relatives de deux plans

Activité 3-2-1 : Propriétés

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé(O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). On considère le plan (P) passant par A et de vecteur normal$\vec{n}$ et le plan (P') passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$
1°) En utilisant tes acquis énumère les différentes positions relatives de deux plans.
2°) Recopie puis complète les propriétés suivantes caractérisant chacune des différentes positions relatives énumérées ci-dessus.

P1 : Si $\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}$ sont colinéaires alors (P) et (P') sont ……..
P2 : Si$\overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq 0\ et\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'} \neq 0$ alors (P) et (P') sont ……
P3 : Si$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0\ et\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n'} = 0$ alors (P) et (P') sont ……..
P4 : Si $\vec{n}\ et\ \overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors (P) et (P') sont …….
P5 : Si $\vec{n}.\overrightarrow{n'} = 0$ sont colinéaires alors (P) et (P') sont ……

Activité 3.2.2 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$). On considère les plans (P) et (Q) d'équation cartésienne respective : $2x + y + 2z - 6 = 0\ et\ 2x - 2y - z + 3 = 0$
1-a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont sécants et détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection (Δ)
-b) Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2°) Détermine une représentation paramétrique du plan (π) passant par le point $A(\ 0\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et parallèle au plan (P).

Activité 3.3 : Positions relatives d'une droite et d'un plan

Activité 3.3.1 : Propriétés

Activité 3.3.1.1 : Rappels

Consigne

Etant donnés une droite (Δ) et un plan (P)

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

En utilisant tes acquis, énumère les différentes positions relatives d'une droite et d'un plan.

Activité 3.3.1.2 : Enoncé n°1

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère la droite (Δ) de repère $(A,\vec{u})$ et le plan (P) passant par B et de vecteur normal $\vec{n}$

Recopie puis complète les propriétés suivantes caractérisant chacune des différentes positions relatives énumérées ci-dessus.

P₁ : Si $\vec{u}.\overrightarrow{n'}=0$ alors la droite (Δ) et le plan (P) sont ……

P₂ : Si$\vec{u}.\vec{n}=0\ et\ \overrightarrow{AB}.\vec{n}\neq 0$ la droite (Δ) et le plan (P) sont alors……

P₃ : Si$\vec{u}.\vec{n}=0\ et\ \overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ alors la droite (Δ) et le plan (P) sont ……

P₄ : Si $\vec{u}\,.\vec{n}\neq 0$ la droite (Δ) et le plan (P) sont ……

Activité 3.3.1.3 : Enonce n°2

Consigne

L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considèrela droite (Δ) de repère $(A,\vec{u})$ et le plan (P) de repère $(B,\vec{v},\vec{w})$

Recopies puis complète les propriétés suivantes caractérisant chacune des différentes positions énumérées dans l'activité 3.3.1.1

P₁ : Si $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont coplanaires alors la droite (Δ) et le plan (P) sont ……..

P₂ : Si $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$sont coplanaires puis$\overrightarrow{AB},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont non coplanaires alors la droite (Δ) et le plan (P) sont ……..

P₃ : Si $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$sont coplanaires puis $\overrightarrow{AB},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont coplanaires alors la droite (Δ) et le plan (P) sont ……

P₄ : Si $\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$sont non coplanaires alors la droite (Δ) et le plan (P) sont …….

P₅ : Si$\vec{u},\vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont non coplanaires puis $\vec{u}$est orthogonale à$\vec{v}\ et$ à $\vec{w}$alors la droite (Δ) et le plan (P) sont ……

Activité 3.3.2 : Evaluation formative

Consigne

L'espace est rapporté à un repère (O, $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$). On considère les droites $(\Delta_1)\ et\ (\Delta_2)$de représentations paramétriques respectives :

$;\begin{cases} x=2-2p \\ y=2p \\ z=2-3p \end{cases};(p\in\mathbb{R})$; $\begin{cases} x=1-r \\ y=2-2r \\ z=1+2r \end{cases}$,$(r\in\mathbb{R})$ et le plan d'équation cartésienne $2x+y+2z+4=0$

1°) Démontre que la droite (Δ_1) et le plan (P) sont sécants en un point A dont on déterminer a les cordonnées

2°) Démontre que la droite (Δ_2) et le plan (P) sont strictement parallèles.

3°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonal au plan (P).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

MAITRISE DU COURS

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1: ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Exercice 1 :
On se propose de démontrer la propriété suivante :
Si deux droites dans l'espace sont orthogonales alors toute droite parallèle est orthogonale à l'autre.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 2 :
On se propose de démontrer la propriété suivante :
Si deux droites dans l'espace sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonales à l'autre.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 3:
On considère la propriété suivante :
Etant donné un point A et un plan (P), il existe une unique droite passant par A et orthogonale à (P).
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 4 :
On considère la propriété suivante :
Etant donné un point A et une droite (D) plan , il existe un unique plan passant par A et orthogonale à (D).
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 5 :
On considère la propriété suivante :
Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toute à toutes les droites de ce plan.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 6 :
On considère la propriété suivante :
Si deux droites de l'espace sont parallèles alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 7 :
On considère la propriété suivante :
Si deux plans sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 8:

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

On considère la propriété suivante :
Si deux droites de l'espace sont orthogonales à un même plan alors elles sont parallèles.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 9:

On considère la propriété suivante :
Si deux plans sont orthogonaux à une même droites alors ils sont parallèles.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 10 :

On considère la propriété suivante :
Si deux plans sont perpendiculaires alors tout plan parallèles à l'un est perpendiculaire à l'autre.
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3: VECTEURS DE L'ESPACE

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 1 :

A, B, C et D sont quatre points distincts de l'espace.
1°) Démontre que $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD})$
2°) Démontre que $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD}\ et\ \overrightarrow{BC})$ ont même milieu
3°) Démontre que $(\overrightarrow{AD}\ et\ \overrightarrow{BC})$ ont même milieu $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD})$.

Exercice 2 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\ et\ \mathcal{W}$ et pour tous nombres réels λ, u, q
1°) Démontre que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2°) Démontre que $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3°) Démontre que $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
4°) Démontre que $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
5°) Démontre que $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda \times \mu)\vec{u}$
6°) Démontre que $1 \times \vec{u} = \vec{u}$
7°) Démontre que $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
8°) Démontre que $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$

Exercice 3 :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de l'ensemble des vecteurs de l'espace. On se propose de démontrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u}$ ou λ est un nombre réel est la droite de repère $(A, \vec{u})$
1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques
2°) Démontre cette propriété.

Exercice 4 :

Soit A un point de l'espace et $\vec{\mu}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'ensemble w des vecteurs de l'espace. On se propose de démontrer que l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{\mu} + \mu\vec{v}\ ou\ \lambda$ et μ sont des nombres réels est un plan de l'espace

1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques

2°) Démontre cette propriété.

Exercice 5

On se propose de démontrer que les trois énoncés suivants sont équivalents

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
- $[AD]\ et\ [BC]$ ont même milieu
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ pour cela,

1°) Démontre que $(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}) \Longrightarrow$ ($[AD]\ et\ [BC]$ ont le même milieu)

2°) Démontre que $([AD]\ et\ [BC]\ ont\ le\ même\ milieu\ ) \Longrightarrow (\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD})$

3°) Démontre que $(\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}) \Longrightarrow (\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD})$

4°) Déduis des questions 1, 2 et 3 que les trois énoncés sont équivalents.

Exercice 6:

Soit $\vec{\mu}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{\mu}\ et\ \vec{v}$ sont non coplanaires

1°) Démontre que$\vec{\mu}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si.

Exercice 7:

Soit $\vec{\mu}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ trois vecteurs de l'ensemble w des vecteurs de l'espace. On se propose de démontrer que$\vec{\mu}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe une combinaison linéaires de ces vecteurs égal au vecteurs nul. Sans que ces coefficients soient tous nuls.

1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques

2°) Démontre cette propriété.

Exercice 8:

Soit $\vec{\mu}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ trois vecteurs de l'ensemble des vecteurs de l'espace. On se propose de démontrer que $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$ sont non coplanaires si et seulement si le seul triplet $(\propto, \beta, \propto)$ de nombre réels tels que $\propto \vec{u} + \beta\vec{v} + \propto \vec{w} = \vec{O}$ est le triplet (O ; O ; O).

1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques

2°) Démontre cette propriété.

Exercice 9:

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ trois vecteurs non coplanaires. On se propose de démontrer que pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'ensemble w des vecteurs de l'espace, il existe un seul triplet (x, y , z) de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{\imath} + \vec{\jmath} + zk$.

1°) Traduis cette propriété en langage mathématiques

2°) Démontre cette propriété.

Exercice 10:

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de w, λ un nombre réels Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs. On se propose de démontrer que si (x, y, z) et $\vec{v}$ ' (x' , y', z') alors $(\vec{u}\ et\ \vec{v}\ )$ (x +x', y + y', z + z') et $\lambda\vec{u}\begin{pmatrix}\lambda u\\ \lambda y\\ \lambda z\end{pmatrix}$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) Traduis ces propriétés en langage mathématiques
2°) Démontre ces propriétés.

Exercice 11:

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.
1°) Démontrer que si M est le milieu de $[AB]$ alors M $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2})$.
2°) Démontre que G est le centre de gravité du triangle ABC alors G $(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3})$.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1 :

Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'ensembles des vecteurs de l'espace.
1°) Démontre que $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
2°) Démontre que $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
3°) Démontre que $(\vec{u}\ +\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
4°) Démontre que pour tout nombre réels k $(k\vec{u}).\vec{v} = (\vec{u}.(k\vec{v}) = k\,(\vec{u}.\vec{v})$.

Exercice 2 :

L'espace est raporté au repère orthonormées $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les vecteurs $\vec{u}(x\,,y\,,z\,)\ et\ \vec{v}'(x',y',z')$ puis dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ les points A $(x_A,\ y_A,\ z_A)$ et B $(\ x_B,\ y_B,\ z_B)$
1°) Démontre que $\vec{u}\,.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$
2-a) Démontre $\vec{u}\,.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
-b) Déduis-en que $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
3°) Démontre que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Exercice 3 :

Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace
1°) Démontre $(\ \vec{u}\ \|\ \vec{v}\ ) \Leftrightarrow (\vec{u}\,.\vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$
2°) Démontre que $\vec{u}\ \perp \vec{v} \Leftrightarrow (\vec{u}\,.\vec{v} = O)$
3-a)Démontre que pour tout vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ de l'espace , on a : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$
-b) Démontre que $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Exercice 4 :

Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace
1°) Démontre que $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\,.\vec{v}$.
2°) Démontre que $(\vec{u}-\vec{v}\,).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\,.\vec{v}$.
3°) Démontre que $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°5: GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Exercice 1 :

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'ensemble w des vecteurs de l'espace.
Démontre qu'il existe un plan et un seul passant par A et de vecteurs normal $\vec{n}$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 2 :

Soit (P) un plan, $\vec{n}$ un vecteur normale à (P) et A un point de (P). On se propose de démontre que pour tout point M de l'espace appartient à (P)si et seulement si $(\overrightarrow{AM} \perp \vec{n}$.

1°) Traduis cette propriété en langage mathématique

2°) Démontre cette propriété

Exercice 3 :

Soit a , b et c des nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

1°) Démontre que tout plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ à une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un nombre réel.

2°) Démontre que toute équation de forme $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Exercice 4 :

Soit A $(x_O,\ y_O\ z_O)$ un point de l'espace et (P) le plan d'équation cartésienne $a_x + b_y + c_z + d = O$.

Démontre que la distance du point A au plan (P) est : $d\ (A, (P)) = \left|\frac{a_{xO} + b_{yO} + c_{zO} + d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

Exercice 5 :

Soit a, b , c, d ; a' , b', c' et d' des nombres réels tels que $(a, b, c) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

1°) Démontre que toute droite de l'espace est caractérisé par un système d'équations cartésienne de plans de la forme $\begin{cases} a_x + b_y + c_z + d = O. \\ a'_x + b'_y + c'_z + d' = O. \end{cases}$

2°) Démontre que si $a_x + b_y + c_z + d = O$ et $a'_x + b'_y + c'_z + d' = O$ sont des équations de deux plans sécants, alors $\begin{cases} a_x + b_y + c_z + d = O. \\ a'_x + b'_y + c'_z + d' = O. \end{cases}$ est un système d'équation cartésienne de la droite d'intersection de ces deux plans.

Exercice 6 :

Soit (D) et (D') deux droites de l'espaces de repère respectifs $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$

1°) Démontre que $[(\vec{u} \parallel \vec{v})] \Leftrightarrow [(D) \parallel (D')] \vee (D) = (D')$

2°) Démontre que $\begin{cases} (\vec{u} \parallel \vec{v})(D) \parallel (D') \\ A \in (D') \end{cases} \Rightarrow (D) \cap (D') =$

3°) Démontre que $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \Longrightarrow (D) \cap (D') \neq \\ \vec{u} \neq \vec{v} \end{cases}$

4°) Démontre que $\begin{cases} \vec{u} \neq \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \neq \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \end{cases} \Longrightarrow (D) \cap (D') = (non\ coplanaires)$

Exercice 7 :

Soit (D) une droite de repère $(A, \vec{u})$ et (P)un plan passant par B de vecteur normal$\vec{n}$.

1°) Démontre que $\begin{cases} \vec{u}.\vec{n} = O \\ \overrightarrow{AB}.\vec{n} \neq O \end{cases} \Longrightarrow (D) \cap (P) =$

2°) Démontre que $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n} = O \\ \vec{u}.\vec{n} = O \end{cases} \Longrightarrow (D) \subset (P)$

3°) Démontre que $\vec{u}.\vec{n} \neq O \Longrightarrow (D) \cap (P) \neq$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 8 :

Soit (D) une droite de repère $(A, \vec{u})$ et (P) un plan de repère $(B, \vec{v}, \vec{w})$.

1°) Démontre que $\begin{cases} \vec{u}, v\ \vec{w}\ coplanaires \\ \overrightarrow{AB},\ \vec{v}, \vec{w}\ coplanaires \end{cases} \Longrightarrow (D) \cap (P) =$

2°) Démontre que $\begin{cases} \vec{u}, v\ \vec{w}\ coplanaires \\ \overrightarrow{AB},\ \vec{v}, \vec{w}\ coplanaires \end{cases} \Longrightarrow (D) \subset (P)$

3°) Démontre que $(\vec{u}, v\ et\ \vec{w}\ noncoplanaires\ ) \Longrightarrow\ (D) \cap (P) \neq$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

FICHES DE TRAVAUX DIRIGES

CONCEPTION DU PROFESSEUR PHILOTHÉE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1: ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Fiche N°1: Droites orthogonales

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un cube. On désigne par I, J, M, N, O et P les milieux respectifs de [AB], [BC], [EF], [FG], [GH] et [HE].

1°) Dresse la liste des droites du plan (ADH) passant par deux points de la figure et orthogonale à la droite (NP).
2°) Dresse la liste des droites du plan (EFG) passant par deux points de la figure et orthogonale à la droite (IJ).

Exercice 2

Soit un tétraèdre ABCD tel que $AC = BD$. I, J, K *et* L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
1-a) Démontre que les droites (AC) et (LK) sont parallèles.
-b) Démontre que $LK = \frac{1}{2}AC$
2-a) Démontre que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.
-b) Démontre que $IJ = \frac{1}{2}AC$
3°) Déduis des questions 1 et 2 que IJKL est un parallélogramme.
4-a) Démontre que $IL = LK$
-b) Déduis – en que IJKL est un parallélogramme particulier à préciser.
-c) Démontre que les droites (IK) et (JL) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a où a est un nombre réel strictement positif.
I, J et K désigne les milieux respectifs des segments [AB], [GH] et [EF].
1-a) Démontre les quadrilatères EKBI et JKBC sont des parallélogrammes.
-b) Déduis – en que EICJ est un parallélogramme particulier à préciser.
-c) Calcule les longueurs des diagonales du parallélogramme EICJ.
2°) Démontre que les droites (IJ) et (EC) sont perpendiculaires.
3°) Démontre que les droites (AH) et (EC) sont orthogonales.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Fiche N°2: Droites et plans orthogonaux

Exercice 1 :

Soit ABCD un rectangle de centre O. On admet qu'il existe qu'il existe un point S de l'espace équidistant des points A, B, C et D.
1°) Démontre que les droites (OS) et (AC) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que les droites (OS) et (BD) sont perpendiculaires.

3°) Déduis des questions précédentes que la droite (OS) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 2 :

Soit ABCD un tétraèdre régulier. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [DC] et [BD].
1°) Démontre que la droite (KJ) est orthogonale au plan (AID)
2°) Démontre que les droites (KJ) et (AD) sont orthogonales.

Exercice 3 :

Soit ABCD un pavé droit.
1-a) Démontre que la droite (BC) est orthogonale au plan (ABE).
-b) Démontre que le triangle EBC est rectangle en B.
2°) On suppose ue le triangle EBG est rectangle en B.
-a) Démontre que la droite (EB) est orthogonale au plan (BCG).
-b) Déduis – en que la droite (EB) est perpendiculaire à la droite (FB).

Exercice 4

ABCDEFGH est un cube.
1-a) Démontre que la droite (EG) est orthogonale au plan (FBD).
-b) Déduis – en que les droites (EG) et (DF) sont orthogonales.
2-a) Démontre que la droite (BG) est orthogonale au plan (ECD).
-b) Déduis – en que les droites (BG) et (DF) sont orthogonales.
3°) On désigne par I le centre de la face BCGF.
-a) Démontre que les droites (HJ) et (FC) sont perpendiculaires.
-b) Déduis – en que les droites (DE) et (HJ) sont orthogonales.

Fiche N°3 : Plans perpendiculaires

Fiche N°3 : Plans perpendiculaires

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 1 :

ABCDEFGH est un cube.
1-a) Démontre que la droite (EF) est orthogonale au plan (BCG).
-b) Déduis – en que les plans (CEF) et (ABG) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que les plans (HBF) et (AEG) sont perpendiculaires.

Exercice 2

Soit ABCD un tétraèdre régulier. On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].
1°) Démontre que les plans (ICD) et (ABC) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que les plans (JBD) et (ABC) sont perpendiculaires.
3-a) Démontre que la droite (IK) est orthogonale au plan (JBD).
-b) Déduis – en que les plans (IKD) et (JBD) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Soit ($\mathscr{P}$) un plan, A et B deux points distincts de ($\mathscr{P}$), ($\mathscr{C}$) le cercle de diamètre [AB] inclus dans ($\mathscr{P}$), C un point de ($\mathscr{C}$) distinct de A et B, ($\mathscr{D}$) la droite orthogonale à ($\mathscr{P}$) en A, D un point de ($\mathscr{D}$) distinct de A.
1°) Fais une figure.
2°) Démontre que les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires.
3°) Démontre que les plans (DAC) et (DBC) sont perpendiculaires.
4-a) Dans le plan (ADC), on désigne par I le projeté orthogonal de A sur la droite (DC). Démontre que la droite (AI) est orthogonale au plan (BCD).
-b) Dans le plan (ADB), on désigne par J le projeté orthogonal de A sur la droite (DB). Démontre que la triangle AIJ est rectangle.
-c) Démontre que les points B, C, I et J sont cocycliques.

Fiche N°4: Projections orthogonales

Fiche N°4: Projections orthogonales

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 1

Soit ABCDEFGH un cube.
On désigne par p_1 la projection orthogonale sur le plan (ABC) et par p_2 la projection orthogonale sur la droite (AB).
1-a) Détermine les images des points E, B et G par p_1.
-b) Détermine la nature du triangle EBG.
-c) Détermine la nature de l'image par p_1 du triangle EBG.
-d) Compare la mesure de l'angle $\widehat{EBG}$ et celle de son projeté orthogonal sur le plan (ABC).
2-a) Détermine les images des points D, H et E par p_2.
-b) Démontre que les points C, G et F ont la même image puis précise cette image.
-c) Déduis – en l'image du triangle CGF par p_2.

Exercice 2

Soit ABCD un tétraèdre régulier.
On désigne par O le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD).
1°) Détermine la nature de chacun des triangles OAC, OAB et OAD.
2°) Démontre que O est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.
3-a) Calcule la longueur OB en fonction de la mesure a du côté du tétraèdre.
-b) Déduis – en la longueur AO.
-c) Calcule le volume de ce tétraèdre en fonction de a.

Exercice 3:

Soit SABC un tétraèdre tel que les triangles ACS et ABS sont rectangles en S. H désigne le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC).
1°) Justifie que la droite (SH) est orthogonale à la droite (BC).
2°) Démontre que la droite (SA) est orthogonale à la droite (BC).
3-a) Démontre que la droite (BC) est orthogonale au plan (SAH).

-b) Déduis – en que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC).

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2: SYTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Fiche N°1: Résolution de systèmes d'équations linéaires

Exercice 1

Résous par la méthode du pivot de Gauss les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1):\begin{cases} 3x+2y-z=3 \\ x-y+5z=8 \\ 2x+4y-z=-1 \end{cases};\ (S_2):\begin{cases} 2x-y+z=-2 \\ 2y-3z=-2 \\ 4x+y+5z=8 \end{cases};\ (S_3):\begin{cases} x-y+3z=7 \\ 2x+3y-2z=1 \\ x+z=4 \end{cases};$$

Exercice 2

Résous par la méthode du pivot de Gauss les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(S_1):\begin{cases} x+4y-z=-7 \\ 3x-y+z=0 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases};\ (S_2):\begin{cases} 3x+y+z=17 \\ -2x-y+3z=-13 \\ 2x-4y+z=-12 \end{cases};\ (S_3):\begin{cases} 2x+y+3z=12 \\ 4x-y+4z=3 \\ x+2y-z=8 \end{cases}$$

Exercice 3

1°) Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) défini par : $\begin{cases} 2x+3y+z=19 \\ x+2y-3z=-20 \\ -2x-y+z=7 \end{cases}$

2°) Déduis – en la résolution de chacun des systèmes suivants :

$$(S_1)\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=19 \\ x^2+2y^2-3z^2=-20 \\ -2x^2-y^2+z^2=7 \end{cases};\ (S_2)\begin{cases} 2x+3y^2+z^2=19 \\ x+2y^2-3z^2=-20 \\ -2x-y^2+z^2=7 \end{cases};$$

$$(S_3)\begin{cases} (4+x-x^2)+\frac{-15y+3}{y-2}+(z+1)^2=19 \\ \frac{4+x-x^2}{2}+\frac{-10y+2}{y-2}-3(z+1)^2=-20 \\ (x^2-x-4)-\frac{5y-1}{y-2}+(z+1)^2=7 \end{cases}$$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Fiche N°2: Résolution de problèmes d'équations linéaires

Exercice 1

Trois nombres sont tels que :

- ✓ Leur somme est égale à 22.
- ✓ La somme des valeurs absolues de ces trois nombres est égale 82

- ✓ Deux de ces trois nombres sont opposés.

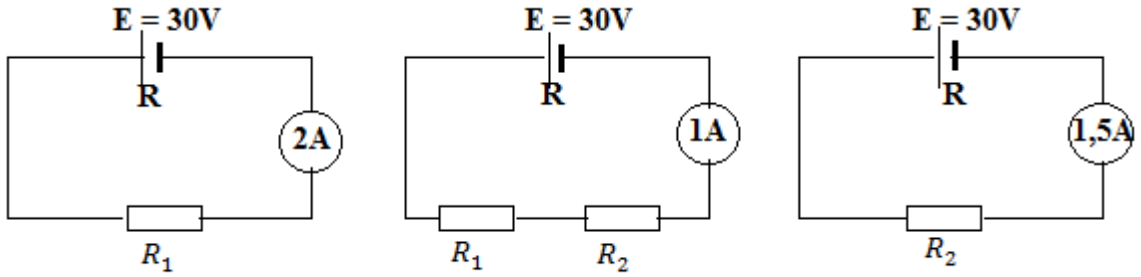
Détermine ces nombres.

Exercice 2

Un nombre de trois chiffres augmente de 540 lorsqu'on permute les deux chiffres de gauche ; il diminue de 27 lorsqu'on permute les deux chiffres de droites. La somme des chiffres de ce nombre est 15. Détermine ce nombre.

Exercice 3

Voici trois montages réalisés avec un générateur de force électromotrice de 30V et de résistance interne inconnue R avec deux conducteurs de résistances R_1 et R_2. Un ampèremètre indique à chaque fois l'intensité.



Montage 1 Montage 2 Montage 3

Calcule R, R_1 et R_2

Exercice 4.

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25F, 60F et 80F. Elle achète au total 12 fruits pour une somme de 640F.
Détermine le nombre de fruits de chaque variété achetée.

Exercice 5

Trois joueurs J_1, J_2 et J_3 jouent un jeu d'argent. Chaque partie a un perdant et deux gagnants. Le perdant donne de l'argent à chaque gagnant de sorte que chaque gagnant double la somme qu'il possédait avant la partie. Trois parties sont jouées. J_1 perd la première partie, J_2 la seconde et J_3 la troisième. Après ces trois parties, chaque joueur possède 24Euros. Détermine la mise initiale de chaque joueur.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3: VECTEURS DE L'ESPACE

Fiche N°1: Calculs vectoriels

Exercice 1

Dans un tétraèdre $ABCD, on\ désigne\ par\ A'B'C'D'$ les centres de gravites respectives des trianglesBCD, ACD, ABD, ABC.

1°) Montre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AA'}$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR GOSSOU

2°) Montre que le vecteur $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'} = \vec{O}$.
3°) En désignant par M un point quelconque de l'espace, montre que les vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + et\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'}$ sont égaux.

Exercice 2

ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs de [CD] et [BC] et G est le centre de gravité du triangle BCD.
1°) Simplifier chacune des expressions suivantes :
$a)\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $b)\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
2°) On rappelle que $\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{IG}$.
-a) Déduis-en que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{AG}$.
-b) Exprime $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AG}$.
-c) Déduis en que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Exercice 3

et 5 / page 141 : Livre C.A.M.
Soit $ABCD$ un tétraèdre, On considère les points I, J, K, L tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$.
1°) Démontrer que $IJKL$ est un parallélogramme.
2°) Soit M et N les points tel que : $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\ et\ \overrightarrow{DN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$. Démontrer que $IJMN$ est un trapèze.
3°) Démontre que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
4°) Soit S le point tel que : $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
-a) Vérifier que les segments $[AS]\ et\ [BD]$ ont même milieu.
-b) On désigne par P et Q les milieux respectifs de $[BD]\ et\ [AC]$. Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{QP}$.

Fiche N°2: Vecteurs colinéaires - vecteurs coplanaires

Fiche N°2: Vecteurs colinéaires - vecteurs coplanaires

Exercice 1

On donne un cube $ABCDA'B'C'D'$
1°) En utilisant les sommets du cube, nommez deux vecteurs colinéaires, deux vecteurs non colinéaires, trois vecteurs coplanaires, trois vecteurs non coplanaires,
2°) Les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{DB}$ sont-ils coplanaires ?
3°) construis le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{C'D'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C}$.
4°) Soit F le milieu du segment $[BC']$. Détermine les nombres réels $\alpha\ et\ \beta$ pour que l'on puisse écrire : $\overrightarrow{EF} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{CC'}$.

Exercice 2

Les points A,B,C,D on pour coordonnées respectives $(2\ ;-1\ ;\ 3)$, $(1\ ;4\ ;-2)$, $(5\ ;2\ ;1)$, $(0\ ;7\ ;1)$.
1-a) Démontre que ABCD est un tétraèdre.
-b) Détermine les coordonnées du point G, centre de ce tétraèdre.
2-a) Calculer les coordonnés du milieu I de segment $[BC]$ et du milieu J de $[AD]$.
-b) Vérifier que le point G est le milieu du segment$[IJ]$.
3-a) Calculer les coordonnées du point G_1, centre de gravité du triangle BCD.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-b) Déduis en les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AG_1}$.

4°) Montrez que les points A,G,G_1 sont alignés puis détermine le nombre réels k tel que $\overrightarrow{AG_1} = k.\overrightarrow{AG}$

Exercice 3

On donne un cube ABCDEFGH. On désigne par I le milieu de $[AE]$ et par J le milieu de $[CF]$.

1°) Déterminer la position du centre L du tétraèdre AEFC.

2°) Que représente le point L pour le segment $[IJ]$?

3°) Soit K le milieu de$[AC]$. Démontre que la droite (KL) passe par le milieu$[EF]$.

4-a) soit Ω le centre de gravité du triangle AEF. Démontrez que L appartient à la droite (CΩ).

-b) Déduis – en la position de L sur le segment [C Ω] .

5°) Soit Ω′ le centre de gravité du triangle ACF. Démontre que les points B, Ω′ et H sont alignés.

6°) Détermine le nombre réelα pour que le point H soit le centre du tétraèdre ABFC.

Fiche N°3 : Caractérisations vectorielles de droites et de plans

Exercice 1

A et B sont deux points distincts de l'espace et I le point défini par : $3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{O}$

1-a) Exprime $\overrightarrow{IA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis construis I.

-b) Justifie que les points A, B et I sont alignés.

2°) Donne un repère de la droite (Δ) définie par les points A,B et I.

3°) Soit M un point de (Δ).

-a) Justifie qu'il existe un nombre réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

-b) Déduis – en l'existence d'un nombre réel γ tel que $\overrightarrow{IM} = \gamma\overrightarrow{AB}$.

-c) Précise alors une représentation paramétrique de la droite (Δ)

Exercice 2

A, B et C sont trois points non alignés de l'espace et G le point défini par : $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} + 5\overrightarrow{GC} = \vec{O}$

1-a) Justifie que les points A, B, C et D sont coplanaires.

-b) Déduis – en deux nombre réels x et y tels que $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

-c) Donne un repère du plan (P) défini par les points A, B et C.

2°) Soit M un point du plan (P).

-a) Justifie qu'il existe deux nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$..

-b) Déduis – en deux nombres réels p et q tel que $\overrightarrow{GM} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$..

-c) Précise alors une représentation paramétrique du plan (P).

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points $A(-1;3;2)$, $B(2;1;-2)$ et la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (AB).

-b) Détermine les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) et du plan de repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2-a) Donne un repère de la droite (Δ).

-b) Parmi les points $M_1\left(-4\,;\,\frac{16}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$, $M_2\left(\frac{11}{5}\,;\,\frac{6}{5}\,;-\frac{8}{5}\right)$ et $M_3\left(-\frac{3}{2}\,;\,\frac{11}{3}\,;\,-\frac{1}{6}\right)$, détermine celui ou ceux qui appartient ou appartiennent à la droite (Δ).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère $(O,\vec{\imath},\vec{j},\vec{k})$ et on considère le plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$ où $A(-1\ ;\ 3\ ;4)$, $\vec{u}(-1;3;2)\ et\ \vec{v}(2\ ;-1;\ 3)$.

1°) Détermine une représentation param »trique du plan (P).

2°) Détermine les coordonnées du point d'intersection du plan (P) et de l'axe des abscisses.

3°) Parmi les points $M_1\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{11}{5}\right)$, $M_2\left(-1\ ;\ \frac{38}{11}\ ;2\right)$ et $M_3(11\ ;\ -27\ ;\ 1)$, détermine celui ou ceux qui appartient ou appartiennent au plan (P).

Fiche N°4: Bases et repères

Fiche N°4: Bases et repères

Exercice 1

On considère les vecteurs $\vec{u}\ \ et\ \vec{v}$définis par : $\vec{u}\ \ et\ \vec{v}:\vec{u}=\vec{\imath}-2\vec{j}+3\vec{k}\ et\ \ \vec{v}=-4\vec{\imath}+\vec{j}\ -2\vec{k}$.

1°) Etudie la colinéarité de ces deux vecteurs.

2°) Calcule les nombres réels $\alpha\ et\ \beta$ pour que le vecteur de coordonnée $(\alpha,4\ ,\beta)$ soit colinéaire à $\vec{v}$.

3°) Calcule les nombres réels $a\ et\ b$ pour que le vecteur de coordonnée (a, b, 5) soit colinéaire à $\vec{u}+\vec{v}$.

Exercice 2

Les vecteurs $\vec{u}\ ,\vec{v}\ \vec{w}$ sont définis par les coordonnées : $\vec{u}(-2\ ;1\ ;3)\vec{v}(3\ ;-2\ ;1),\vec{w}(1\ ;-4\ ;5)$.

1°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}\ ,\ \vec{u}-\vec{v}\ ;\ -2\vec{v},\vec{u}+\overrightarrow{2v}-3\vec{w}$.

2°) Calcule les nombres réels $\alpha\ et\ \beta$ pour que le vecteur $(6\ ;\alpha\ ;\beta)$ soit colonéaire à $\vec{u}$.

3°) Détermine trois nombres réels $a,\ b,c$ pour que le vecteur $(-5;-7\ ;\ 16)$puisse s'écrire $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$.

Exercice 3

Le repère $(O,\vec{\imath},\vec{j}\ ,\vec{k}\ )$ est orthogonal. On donne les points $A\ (-2\ ;\ 1\ ;3),B\ (1\ ;0\ ;2)et\ C\ (3\ ;1\ ;-4)$.

1°) Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ dans la base$(\vec{\imath},\vec{j}\ ,\vec{k})$.

2°) Calcule les coordonnées des points I,J,K, milieux respectifs des segments $[AB],[AC],[BC]$.

3°) Calcule la norme de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$.

4°) Calcule les distances AK, BJ et CI.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: PRODUIT SCALAIRE

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: PRODUIT SCALAIRE

Fiche N°1: Définition du Produit Scalaire

Fiche N°1: Définition du Produit Scalaire

Exercice 1

ABCDEFGH est un cube d'arête 5cm et de centre O. On désigne par I le centre de la face BCGF.

1-a) Calcule la longueur AF.

-b) Déduis – en celle de CI.

2°) Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{EG}$

Exercice 2

On considère un tétraèdre régulier ABCD dont les arêtes ont pour longueur a $avec$ $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1-a) Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$,

-b) Déduis – en que les arêtes [AB] et [CD] ont des supports orthogonaux.

2°) Soit E et F les milieux respectifs des arêtes [AD] et [BC]

-a) Démontre que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$

-b) Déduis – en la distance EF.

3-a) Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BC}$,

-b) Déduis – en que la droite (EF) est perpendiculaire aux droites (AD) et (BC).

4°) Soit G le milieu de [EF].

-a) Démontre que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right)$

-b) Déduis – en la distance DG.

-c) Démontre que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

Exercice 3

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $AB = a$ $avec$ $a \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par (Δ) la perpendiculaire en B au plan (ABC) et D un point de (Δ).tel que $BD = a$. Soit R un point de (AD) défini par $\overrightarrow{AR} = x\overrightarrow{AD}$ et S un point de la droite (BC) tel que $\overrightarrow{RS} = y\overrightarrow{BC}$.

1°) Détermine x et y pour que la droite (RS) soit perpendiculaire aux droites (AD) et (BC).

2°) Détermine x et y pour que la droite (RS) soit perpendiculaire au plan (ADC).

Fiche N°2: Utilisation du Produit Scalaire

Exercice 1

Soit A et B deux points distincts de l'espace tel que $AB = a$ $avec$ $a \in \mathbb{R}_+^*$. et f l'application de l'espace dans $\mathbb{R}$ qui, à tout point M, associe le nombre réel $f(M) = -3MA^2 + 5MB^2$. On désigne par G le point de l'espace tel que $-3\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{O}$.

1-a) Exprime $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ en $fonction$ de $\overrightarrow{AB}$

-b) Déduis – en GA et GB en fonction de a

2-a) Démontre que $f(M) = 2MG^2 - 3GA^2 + 5GB^2$

-b) Déduis – en l'expression de $f(M)$ en fonction de MG et a

-c) Détermine suivant les valeurs de al'ensemble des points M de l'espace tels que $f(M) = \frac{45a}{2} + 15$

3°) On pose : $AB = 6cm$.

Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que l'application g de l'espace dans $\mathbb{R}$ définie par $g(M) = -3MA^2 + MB^2 = -5$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 2

A et B sont deux points distincts de l'espace et on considère l'application h de l'espace dans ℝ qui, à tout point M associe le nombre réel $h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et le point I milieu du segment [AB].

1-a) Démontre que $h(M) = MO^2 - \frac{1}{4}AB^2$

-b) Déduis – en que $h(M)$ est minimum lorsque M est en O.

2°) On suppose maintenant que h est l'application d'une droite **(𝒟)**dans ℝ qui , à tout point M de la droite **(𝒟)**associe le nombre réel $h(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$. Démontre qu'il existe un point O' de **(𝒟)**pour lequel h présente un minimum.

3°) A, B, C sont trois points de l'espace. Résous dans l'espace E les équations géométriques suivantes :

-a) $\overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 5$

-b) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}).\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right) = 5$

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Ecris une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(-1\,;3\,;0)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$

2°) Ecris une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(3\,;-2\,;1)$ et passant par le point $A(2\,;-4\,;3)$

3°) Ecris une équation cartésienne de la sphère de diamètre [AB] où $A(3\,;-5\,;7)\ et\ B(1\,;-3\,;9)$

4°) Ecris une équation cartésienne de la sphère définie par les quatre points $A(0\,;4\,;-1), B(-2\,;4\,;-5), C(1\,;1\,;-5)\ et\ D(1\,;0\,;-4)$

5°) Détermine les éléments caractéristiques de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 39 = 0$

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Fiche N°1: Equations cartésiennes

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice1

1°) Détermine une équation cartésienne des plans de repères$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(O,\vec{\imath},\vec{k})$ et $(O,\vec{\jmath},\vec{k})$

2°) Détermine une équation cartésienne des plans de repères $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(A,\vec{\imath},\vec{k})$ et $(A,\vec{\jmath},\vec{k})$ avec $A(1\,;2\,;3)$

3°) D2termine l'équation cartésienne du plan (ABC) où $A(-2\,;0\,;0), B(0\,;3\,;0)\ et\ C(0\,;0\,;4)$

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points $A(1\,;2\,;3), B(-2\,;0\,;0),\ C(0\,;3\,;0)\ et\ D(0\,;0\,;4)$.

1°) Détermine un système d'équation cartésienne de chacune des droites de repères $(A,\vec{\imath})$, $(A,\vec{\jmath})$ et $(A,\vec{k})$
2°) Détermine une équation cartésienne du plan (BCD).

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points Soit le point $A(-1\ ;\ 3\ ;-5), B(2\ ;-1\ ;1)$ *etles vecteurs* $\vec{u}(2;-5\ ;2), \vec{v}(-3;5;2)$ *et* $\vec{w}(1\ ;\ 0\ ;-2)$.
1-a) Détermine un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ *et* à $\vec{v}$.

-b) Déduis – en une équation cartésienne du plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$

2°) Démontre que $\begin{cases} 2x+z-5=0 \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases}$ est un système d'équations cartésienne d'une droite de repère $(B,\vec{w})$

3°) Détermine un repère de la droite (D) qui a pour système d'équations cartésienne $\begin{cases} x-2z+3=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$

Exercice 4

Soit ABCDEFGH un cube. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AD]$ *et* $[AE]$.
On pose : $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AE}=\vec{w}$.
1°) Détermine une équation cartésienne du plan (IJK) dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et
2°) Détermine un système d'équations cartésiennes de chacune des droites (IJ), (IK) et (JK) dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Fiche N°2 : Représentations paramétriques

Exercice1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
1°) Détermine une représentation paramétrique de chacune axe du repère .
2°) Détermine une représentation paramétrique de chacun des plans de repères $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $(O,\vec{\imath},\vec{k})$ et $(O,\vec{\jmath},\vec{k})$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point $A(1\ ;\ -3\ ;2)$ et les vecteurs $\vec{u}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$, $\vec{v}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$ et $\vec{w}=\vec{\jmath}+2\vec{k}$.
1°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) de repère $(A,\vec{u})$.
2°) Détermine une représentation paramétrique du plan (P) de repère $(A,\vec{v},\vec{w})$.
3°) Détermine un système d'équation cartésienne de la droite (Δ).
4°) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

Exercice 3

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point $A(1\ ;\ -3\ ;2)$ la droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 3+2\alpha \\ y = 2+\alpha \\ z = -1-\alpha \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ et le plan (P) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2-\mu+3\rho \\ y = 1+\mu-2\rho \\ z = -2\mu-\rho \end{cases}$ où $(\mu,\rho) \in \mathbb{R}^2$

1°) Donne un repère de la droite et du plan

2°) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ)

3°) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

4°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ') passant par A et perpendiculaire au plan (P).

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère le point $A(1\ ;-3\ ;2)$ la droite (Δ) de système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x-y-2z+3=0 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$ et les plans (P), (Q) et (R) d'équations cartésiennes respectives : $x-z+2=0\ ;2x-y+3z+1=0\ et\ 2x+3y+8=0$.

1°) Détermine une représentation paramétrique de chacun des plans (P), (Q) et (R).

2°) Détermine une représentation de la droite (Δ).

3°) Détermine une représentation paramétrique du plan (S) passant par A et orthogonal à la droite (Δ).

4°) Détermine un repère de la droite (D) qui a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x = 2z+3=0 \\ n+y-2=0 \end{cases}$

Fiche N°3 : Postions relatives de droites et de plans de l'espace

Exercice 1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les droites(Δ_1), (Δ_2), (Δ_3) et (Δ_4) définies par :

$(\Delta_1):\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = -1-3\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$; $(\Delta_2):\begin{cases} x+y-z-6=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases}$, $(\Delta_3):\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ x+z=1 \end{cases}$ et$(\Delta_4):\begin{cases} 2x+y=2 \\ y-2z=0 \end{cases}$

1°) Démontre que les deux droites (Δ_1) et (Δ_2)sont sécantes en un point dont on déterminera les coordonnées.

2-a) Démontre que les droites (Δ_3) et (Δ_4) sont strictement parallèles.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan déterminépar les deux droites

Exercice 2

Soit (D) la droite qui a pour système d'équation cartésienne $\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-2y+z+1=0 \end{cases}$ et (P) le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \mu+\rho \\ y = 2-\mu \\ z-1-2\rho \end{cases}$ $(\mu,\rho) \in \mathbb{R}^2$

Démontre que (D)et (P) sont sécants en un point dont on déterminera les cordonnées

Exercice 3

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Soit (P) et (P') les plans de représentations paramétriques respectives $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda + \mu \\ y = 1 + \lambda - \mu \\ z = 1 - 2\lambda + \mu \end{cases}$,$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$) et

$\begin{cases} x = 2 - \alpha - 2\beta \\ y = 1 + \alpha - \beta \\ z = 2\alpha - \beta \end{cases}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

1°) Détermine une équation cartésienne de chacun des plans (P) et (P').

2-a) Démontre que ces deux plans sont sécants.

-b) Détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

Exercice 4

Soit (P) le plan d'équation cartésienne $x - 2y + 2z = 6$

1°) Détermine une représentation paramétrique de la droite d'intersection (Δ) de ce plan avec le plan de repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2°) Détermine une équation cartésienne du plan (P') perpendiculaire à (P) et contenant (Δ).

Fiche N°4 : Famille de droites et de plans de l'espace

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère la famille de droites $(\mathfrak{D}_m)$ d'équation : $(2m - 1)x + (3 - m)y - 7m + 6 = 0$ où m est un paramètre réel.

1°) Détermine le nombre réel pour que :

-a) $(\mathfrak{D}_m)$ soit parallèle à l'axe des abscisses.

-b) $(\mathfrak{D}_m)$ soit parallèle à l'axe des ordonnées.

-c) $(\mathfrak{D}_m)$ passe par le point de coordonnées $(-1\ ;\ 1)$

-d) $(\mathfrak{D}_m)$ soit parallèle à la droite d'équation $2x + 3y - 1 = 0$

-e) $(\mathfrak{D}_m)$ soit orthogonale à la droite d'équation $3x + 4y = 0$

2°) Démontre que toutes les droites $(\mathfrak{D}_m)$ passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

3°) Détermine m pour que le coefficient directeur de $(\mathfrak{D}_m)$ soit égal à un nombre réel p. On discutera suivant les valeurs de p.

4°) Toute droite passant par A est une droite de $(\mathfrak{D}_m)$?

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et on considère les droites (D_m) et (Δ_m) d'équations respectives :

$(m + 2)x + (3 - 2m)y + 3m - 8 = 0$ et $(9m - 3)x + 10m - 8(y - 8m - 2 = 0)$

1-a) Démontre que toutes les droites (D_m) passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

-b) Démontre que toutes les droites (Δ_m) passent par un point fixe B dont on déterminera les coordonnées.

2°) Existe – t – il des valeurs de m pour lesquelles $(D_m) = (\Delta_m)$

3°) Etudie suivant les valeurs de m l'ensemble $(D_m) \cap (\Delta_m)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère la famille de plans (P_m) d'équation : $(2m-1)x+(3-m)y+(m+1)z-2m-1=0$ où m est un paramètre réel.

1°) Détermine le nombre réel pour que :

-a) (P_m) soit parallèle au plan de repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

-b) (P_m) soit parallèle au plan de repère $(O,\vec{\imath},\vec{k})$.

-c) (P_m) soit perpendiculaire au plan de repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

-d) (P_m) soit parallèle au plan d'équation $2x+3y+z-1=0$

-e) (P_m) soit perpendiculaire au plan d'équation $3x+4y=0$

2°) Démontre que tous les plans (P_m) passent par une droite fixe (Δ) dont on déterminera une représentation paramétrique.

3°) Détermine m pour qu'un vecteur normal à (P_m) soit égal au vecteur $\vec{v}(-1,2,4)$.

4°) Détermine m pour qu'un vecteur normal à (P_m) soit orthogonale au vecteur $\vec{v}(-1,2,4)$.

5°) Détermine m pour qu'un vecteur normal à (P_m) soit colinéaire au vecteur $\vec{v}(-1,2,4)$.

6-a) Toute droite parallèle à (Δ) est une droite de (P_m)?

-b) Toute droite orthogonale à (Δ) est une droite de (P_m)?

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère la famille de plans (P_m) et (Q_m) d'équations respectives :

$(m+2)x+(3-2m)y-(2m+3)z+m-5=0$ et $(9m-3)x+(10m-8)y+mz-m+2=0$

1-a) Démontre que toutes les plans (P_m) passent par une droite fixe (Δ) dont on déterminera une représentation paramétrique.

-b) Démontre que toutes les plans (P_m) passent par une droite fixe (Δ') dont on déterminera une représentation paramétrique.

-c) Détermine la position relative de (Δ) et (Δ')

2°) Existe – t – il des valeurs de m pour lesquelles $(P_m)=(Q_m)$

3°) Etudie suivant les valeurs de m l'ensemble $(P_m)\cap(Q_m)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1: ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Exercice 1

ABCDEFGH est un cube.
1-a) Démontre que la droite (CH) est orthogonale est orthogonale au plan (ADG).
-b) Démontre que les plans (CHE) et (ADG) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que (ACE) et (BDH) sont perpendiculaires.

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube d'arrête a, a$\in \mathbb{R}_+^*$ avec I milieu de $[AB]$ et J le centre de la face GCGF.
1-a) Démontre que ABGH est un rectangle
-b) Exprime les dimensions de ce rectangle en fonction de a.
2°) Démontre que IJH est un triangle rectangle.

Exercice 3

EFGHIJKL est un cube
Démontre que :
1°) La droite (HL) est orthogonale au plan (EFG)
2°) Les droites (LH) et (FG) sont parallèles
3°) Les droites (HL) et (EG) sont orthogonales
4°) Les plans (JKG) et (LIE) sont parallèles

Exercice 4

SABC est un tétraèdre régulier.
M et N sont les milieux respectifs des segments $[SA]$ et$[BC]$
1-a) Démontre que la droite (SA) est orthogonale au plan MBC
-b) Déduis-en que la droite (SA) est orthogonale à la droite (BC)
2°) Démontre que la droite (MN) est orthogonale à chacune des droites (SA) et (BC)

Exercice 5

ABCD est un tétraèdre régulier, $[AH]$ est la hauteur issue de A dans le triangle ACD.
1°) Montre que (BH) est la hauteur issue de B dans le triangle BCD.
2-a) Démontre que la droite (CD) est orthogonale au plan (BAH).
-b) Déduis-en que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.

Exercice 6

Dans un plan (P) on considère un losange ABCD. On désigne par O le point d'intersection (AC) et (BD) et par (Δ) la droite orthogonale à (P) en O.
Soit S un point de (Δ) distinct de O.
1°) Montre que la droite (AC) est orthogonale aux droites (SB) et (SD).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

2°) Montre que la droite (BD) est orthogonale aux droites (SA) et (SC).
3°) Montre que les plans (SBD) et (SAC) sont perpendiculaires.

Exercice 7

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les centres respectifs des deux carrés ABCD et EFGH
1°) Démontre que la droite (IJ) est orthogonale aux plans (ABC) et (EFG)
2°) Démontre que les plans (AEC) et (BDF) sont perpendiculaires.

Exercice 8

ABCDEFGH est un cube de centre O et I, J, K, L les milieux respectifs des arêtes[BC], [CG], [EF]et [AE].
1°) Démontre que la droite (IO) est orthogonale aux droites (AD) et (KL) aux droites (AD) et (KL)
2-a) Démontre que la droite (BG) est orthogonale au plan (EFC).
-b) Déduis-en que les droites (IJ) et (EC) sont orthogonales
3°) Construis le projeté orthogonal du point L sur le plan (EFC)
4°) Construis le projeté orthogonal du point L sur la droite (BG)

Exercice 9

ABCDEFGH est un cube, I le centre du carré BCGF et J le milieu du segment [GH]
1-a) Démontre que la droite (FC) est orthogonale au plan ABG
-b) Déduis-en que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales
2-a) Démontre que la droite (BH) est orthogonale au plan (ACF)
-b) Déduis-en que les droites (BH) et (AI) sont perpendiculaires
3°) Démontre que le triangle AIJ est rectangle en I.

Exercice 10

ABCD est un tétraèdre et I, J, K, L, M sont les milieux respectifs des segments[AB], [BC], [CD], [DA], [AC] et [BD]. On suppose que AB = CD et AC = BD
1°) Démontre que les quadrilatères IJKL et MLNG sont des losanges
2°) Démontre que la droite (JL) est orthogonale au plan IKM
3°) Démontre que la droite (JL) est orthogonale aux droites (BC) et (AD)

Exercice 11

Soit ABCD un tétraèdre régulier, I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD]
1°) Démontre que les plans (ICD) et (JAB) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que le plan ICD est perpendiculaire aux plans (ABC) et (ABD)
3°) Démontre que le plan (JAB) est perpendiculaire aux plans (ACD) et (BCD)

Exercice 12

ABCD est un tétraèdre régulier. I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].
1°) Démontre que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABJ).
2°) Démontre que les droites (CD) et (AB) sont orthogonales.
3°) Démontre que la droite (IJ) est perpendiculaire commune aux droites (AB) est (CD).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 13

BCD est un triangle quelconque. Soit (Δ) la perpendiculaire en B au plan (BCD) et A un pont de (Δ) distinct de B. Dans le plan (ACD), on désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (CD).
1-a) Démontre que la droite (CD) est perpendiculaire au plan (ABH).
-b) Déduis – en que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
2°) Soit K le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD). Démontre que les points A, K et H sont alignés.

Exercice 14

ABCDEFGH est un cube.
1°) Démontre que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.
2°) Démontre que la droite (EC) est perpendiculaire aux plans (AFH) et (BDG).
3°) La droite (EC) rencontre le plan (AFH) en un point I. Démontre que I est le centre de gravité du triangle AFH.

Exercice 15

Soit BCD un triangle quelconque et H l'orthocentre de ce triangle. On désigne par (Δ) la perpendiculaire en H au plan (BCD) et A un point de (Δ) distinct de H.
1°) Démontre que deux arêtes du tétraèdre ABCD sont orthogonales.
2°) Démontre que l'orthocentre de chacune des faces du tétraèdre ABCD est le projeté orthogonal sur cette face du sommet opposé du tétraèdre.

Exercice 16

OPQR est un tétraèdre régulier d'arrête a. M et N sont les milieux respectifs des segments [OP] et [QR]
1-a) Démontre que (QR) est orthogonale à (PON)
-b) Déduis-en que (PQR) est perpendiculaire (PON)
2°) Démontre que (POQ) est perpendiculaire à (QRM)
3°) Justifie que $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}m$

Exercice 17

SABC est un tétraèdre régulier et O le centre de gravité du triangle ABC. I et J désignent les milieux respectifs des arêtes [BC] et [AB].
1°) Fais une figure.
2°) Démontre que la droite (BC) est orthogonale au plan (SOI).
3°) Démontre que la droite (BA) est orthogonale au plan (SOJ).
4°) Démontre que le segment [SO] est une hauteur du tétraèdre.

Exercice 18

On considère un tétraèdre tel que $SC = AB$, la droite (SC) est orthogonale au plan (ABC) et la droite (AB) est orthogonale au plan (SAC). I et J sont les milieux respectifs des segments [BS] et [AC].

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) Démontre que $JB = JS$.
2°) Démontre que le segment [IJ] est une hauteur du triangle BJS.
3°) Démontre que le segment [IJ] est une hauteur du triangle AIC.
4°) Enonce la propriété de la droite (IJ).

Exercice 19

Dans un plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en C. M est un point milieu du segment [AB]. **(𝒟)** est une droite passant par le point C et orthogonale au plan (P) et S un point de **(𝒟)**distinct de C.
1°) Fais une figure.
2°) Démontre que les droites (CM) et (AB) sont perpendiculaires.
3°) Démontre que les droites (CS) et (AB) sont orthogonales.
4°) Démontre que les droites (SM) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 20

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 10cm$; $AD = 3cm$ *et* $DH = 5cm$. I est un point milieu du segment [DC]. Les faces ABCD et EFGH sont opposées.
1°) Fais une figure.
2°) Démontre que le triangle FHI est rectangle en H.
3-a) Calcule les longueurs EI, GI et GE.
-b) Déduis – en que les droites (IE) et (IG) sont perpendiculaires.
4°) Démontre que la droite (IG) est orthogonale au plan (HEI).

Exercice 21

Soit ABCDEFGH un cube avec $AB = 10cm$. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [DH] et [BF].
1°) Démontre que $IJ = DB$ puis calcule IJ
2°) On appelle O le point d'intersection du plan (AEG) et de la droite (IJ). Calcule OC.
3°) Démontre que le triangle IOC est rectangle en O.
4-a) Démontre que le triangle IOG est rectangle.
-b) Déduis – en la position relative de la droite (IJ) et du plan (AEG).
5°) Calcule le volume de la pyramide de sommet I et de base AEGC.

Exercice 22

Projection orthogonales d'un angle droit. On considère dans un repère Q, deux droites perpendiculaires Δ *et* D, sécantes en O, un plan P non perpendiculaire au plan Q et la projection orthogonal P de l'espace sur le plan P, soit A un point de Δ, B un point de D, et O', A', B' les images respectives des points O,A, B par la projection p.

1°) On suppose dans cette question que la droite (OA) est parallèle au plan p. Montrez que (OA) est perpendiculaire au plan projetant D. Déduisez-en que les droites (O'A') et (O'B') sont perpendiculaire dans le plan p. Vous venez de démontrez une propriété importante : si un angle droit à un coté parallèle à

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

un plan p et l'autre côté non perpendiculaire à P, son image par la projection orthogonale sur p est un angle droit.

2°) On suppose maintenant que les droites (O'A') et (O'B') sont perpendiculaires dans P, Montrez que, si la droite (OB) n'est pas parallèle à P, alors la droite (OA) est perpendiculaire au plan OO' B ; déduisez-en que (OA) est parallèle à P. Vous venez de démontrez que si un angle droit se projette orthogonalement sur un plan P suivant un angle droit, un de ses cotés au moins est parallèle au plan P.

Exercice 23

. On considère un plan P, une droite Δ contenue dans P et un point A qui n'appartient pas à P. Soient H l'image de A par la projection orthogonale sur P et K l'image de A par la projection orthogonale sur Δ.

1°) A quelle condition les points H et K sont-ils confondus ?

2°) Montre que, si H et K sont distincts, la droite (HK) est perpendiculaire à Δ dans le plan Q.

Exercice 24

On considère un plan P, une droite Δ contenue dans P et un point A qui n'appartient pas à P. Soient H l'image de A par la projection orthogonale sur P et K l'image de H par la projection orthogonale sur Δ. Montrez que la droite (AK) est perpendiculaire à Δ dans le plan défini par Δ et le point A.

Exercice 25

On considère deux plans P et P' sécants suivants une droite Δ, et un point A qui n'appartient ni à P ni à P'. Détermine une droite qui passe par A, coupe Δ et se projette orthogonalement sur P et sur P' suivant deux droites orthogonales.

Exercice 26

On considère un plan P, un point A du plan et un point S qui n'appartient pas au plan. On suppose que la droite (AS) n'est pas perpendiculaire à P. Soit M un point variable au plan P.

1° Montre que, si le triangle SAM est rectangle en A, le point M décrit une droite Δ que vous précisere.

2° Montre que, si le triangle SAM est rectangle en M, le point M décrit un cercle que vous préciserez.

3°Montre que, si le triangle SAM est rectangle en S, le point M décrit une droite que vous préciserez.

Exercice 27

Soient P un plan et p la projection orthogonale de l'espace sur P. L'image par p d'un triangle ABC est un triangle A'B'C' ;

1°) Montre que l'image par p du centre d'inertie G du triangle ABC est le centre d'inertie G' du triangle A'B'C'.

2°) A quelle condition l'image par p de orthocentre H du triangle ABC est-elle l'orthocentre H' du triangle A'B'C' ?

Exercice 28

Soient P un plan et p la projection orthogonale de l'espace sur P. L'image P d'un carré ABCD est un quadrilatère A'B'C'D'.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) Montre que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

2°) A quelle condition le parallélogramme A'B'C'D' est –il un rectangle ?

3°) A quelle condition le parallélogramme A'B'C'D' est –il un losange ?

Exercice 29

On considère un triangle ABC, la droite Δ perpendiculaire en A au plan ABC et un point S variable sur la droite Δ.Soient B' et E les pieds des perpendiculaires menées de B à (AC) et (CS), C' et F les pieds des perpendiculaires menées de C à (BA) et (BS).
1°) Montre que la droite $(B'E)$ est perpendiculaire à (SC) et que $(C'F)$ est perpendiculaire à (SB).
2°) Montre que l'orthocentre K du triangle SBC est l'image de l'orthocentre H du triangle ABC par la projection orthogonale sur le plan SBC.
3°) Montre que, lorsque S décrit Δ, chacun des points E, F, K décrit un cercle dont vous préciserez le plan et un diamètre.

Exercice 30

On considère un cercle $\mathscr{E}$, un diamètre (AB) de ce cercle, la droite Δ perpendiculaire en A au plan du cercle, un point fixe S de Δ et un point variable M de $\mathscr{E}$.
1°) Montre que le triangle SBM est rectangle en M et que les plans SAM et SBM sont perpendiculaires.
2°) Le plan qui passe par A et qui est perpendiculaire à la droite (SB) coupe respectivement (SB) et (SM) en E et en F. Montre que le triangle AFE est rectangle en F et que, lors que M décrit $\mathscr{E}$, le point F décrit un cercle dont tu préciseras le plan et le diamètre.

Exercice 31

Soient un plan P et deux droites Δ et Δ′ perpendiculaires à P, qui percent ce plan en A et en A'. On considère une demi-droite Ax dont le support est perpendiculaire à Δ et telle que la mesure de l'angle $\widehat{A'Ax}$ soit 45 degrés. Soient M un point variable sur Δ' et H le pied de la perpendiculaire menées de M au support de Ax.
1°) Montre que le point H reste fixe lorsque que M décrit Δ'.
2°) Soient Q le plan perpendiculaire en A à la droite (AA') et M' le ou la droite (MH) perce le plan Q. Montre que H est le milieu du segment$[M, M']$, et que, si M décrit Δ′, le point M' décrit une droite que tu préciseras.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2: SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Exercice 1

Résous les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+3y-5z=-11 \\ 4x+y-2z=-8 \\ x-2y+z=-2 \end{cases}$ $b)$ $\begin{cases} x-2y+z=-5 \\ -x+y+2z=-4 \\ 2x-y-z=5 \end{cases}$ $c)$ $\begin{cases} x+2y+3z=-2 \\ 2x+3y-z=-1 \\ 3x+y+2z=1 \end{cases}$ $d)$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{2} \\ y-2z=\sqrt{2} \\ -2x+z=\sqrt{2} \end{cases}$

Exercice 2

Résous les systèmes suivants :

$(S_1):\begin{cases} 2x-3y+5z=0 \\ 3x-5y+2z=1 \\ 2x-5y+3z=2 \end{cases}$ $(S_2):\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y+6z=3 \\ 2x-9y+12z=0 \end{cases}$ $(S_3):\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ -4x-5y+7z=1 \\ 2x+y-2z=9 \end{cases}$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. COSSOU

$(S_4):\begin{cases}x+y+z=1\\5x-2y-10z=0\\3x+5y-2z=6\end{cases}$ $(S_5):\begin{cases}x+y+z=2\\4x+5y-20z=-2\\-3x+5y+5z=4\end{cases}$ $(S_6):\begin{cases}5x+2y-3z=1\\8x-4y+3z=-5\\2x-5y+4z=-6\end{cases}$

Exercice 3

Résous les systèmes suivants :

$(S_1):\begin{cases}2x+5y-6z=8\\x+y-6z=0\end{cases}$ $(S_2):\begin{cases}x+y+z=0\\2x-3y=0\end{cases}$ $(S_3):\begin{cases}-3x-5y+2z=-1\\-3x-5y+z=-2\end{cases}$

$(S_4):\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+3z=2\\x-y-2z=-1\end{cases}$ $(S_5):\begin{cases}x++y+z=0\\2x-5y+2z=0\\x-8y-z=0\end{cases}$ $(S_6):\begin{cases}x-2y+z=0\\3x+y-2z=2\\5x-3y=2\end{cases}$

Exercice 4

Résous les systèmes suivants :

$(S1):\begin{cases}\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y+2}=1\\\frac{5}{x-1}+\frac{4}{y+2}=-9\end{cases}$ $(S2):\begin{cases}\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y-3}=-6\\\frac{7}{2x+1}+\frac{4}{y-3}=36\end{cases}$ $(S1):\begin{cases}3\sqrt{x}+4\sqrt{y}=1\\5\sqrt{x}+2\sqrt{y}=-3\end{cases}$

$(S4):\begin{cases}5x^2+4y^2=21\\4x^2+y^2=8\end{cases}$ $(S5):\begin{cases}5\sqrt{x}+4\sqrt{y}=21\\4\sqrt{x}+\sqrt{y}=8\end{cases}$

$(S6):\begin{cases}\frac{1}{x+3}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z}=1\\\frac{2}{x+3}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z}=8\\\frac{4}{x+3}+\frac{9}{y+2}+\frac{1}{z}=27\end{cases}$ $(S7):\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z-1}=1\\\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{y^2}+\frac{1}{z-1}=4\\\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{9}{y^2}+\frac{1}{z-1}=12\end{cases}$; $(S8):\begin{cases}\frac{1}{x+y}-\frac{2}{x+3y+1}=-1\\\frac{2}{x+y}+\frac{3}{x+3y+1}=5\end{cases}$

$(S9):\begin{cases}2\left|\frac{x+1}{3}\right|-3\left|\frac{y-2}{5}\right|+\left|\frac{2z-1}{3}\right|=0\\\left|\frac{x+1}{3}\right|+2\left|\frac{y-2}{5}\right|-\left|\frac{2z-1}{3}\right|=2\\-3\left|\frac{x+1}{3}\right|-5\left|\frac{y-2}{5}\right|+4\left|\frac{2z-1}{3}\right|=-4\end{cases}$

Exercice 5

Résous suivant les valeurs du paramètre réel m les systèmes suivants :

$(S1):\begin{cases}mx+y=1\\x-y=3\end{cases}$ $(S2):\begin{cases}x+my=2\\mx-y=3\end{cases}$ $(S3):\begin{cases}mx-y=5\\mx+(m-3)y=1\end{cases}$

$(S4)=\begin{cases}x+y=m\\x-my=m^2\end{cases}$ $(S5):\begin{cases}(m+1)x-(m-1)y=2\\3x-5y=-2\end{cases}$

$(S6):\begin{cases}2x-my=m-1\\(5-m)x-3y=11-5m\end{cases}$ $(S7):\begin{cases}(2m-1)x+(3m+2)y=m+4\\(m-1)x+2my=2\end{cases}$

$(S8):\begin{cases}mx-3y=5\\4x+(m+7)y=15\end{cases}$

Exercice 6

Un homme, sa femme et leur fils sont assis à la même table. Le père dit : « La somme de nos âges est 65 ». La mère dit à son fils : « je quatre fois plus âgés que toi ». Le fils dit à son père : « Dans 16 ans seras deux fois plus âgé que moi ». Détermine l'âge de chacun d'eux.

Exercice 7

1°) Détermine la parabole (P) d'équation $y=ax^2+bx+c$ dans les cas suivants :

-a) (P) passe par les points $A(1\,;\,0)\,;\,B(-1\,;\,1)\;et\;C(2\,;\,3)$

-b) (P) passe par les points $A(-4\,;\,0)\,;\,B(0\,;\,0)\;et\;C(3\,;\,4)$

-c) (P) passe par les points $A(1\,;\,1)\,;\,B(2\,;\,3)\;et\;C(2\,;\,4)$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

2°) Que constates – tu dans le dernier cas ?

Exercice 8

Trois frères ont acheté un objet à 100F. Le troisième fils dit qu'il pourrait le payer seul si le second lui donnait la moitié de l'argent qu'il a. Le second dit si l'aîné lui donnait le tiers de son argent, il paierait l'objet seul. Enfin, l'aîné ne demande que le quart de l'argent du 3è fils pour payer l'objet seul. Combien chacun avait-il d'argent ?

Exercice 9

Une ménagère se rend au marché et achète des bananes, des mangues et des ananas dont les prix à l'unité sont respectivement 25F, 60F et 80F. Elle achète un total de 12 fruits pour une somme de 640F. Détermine le nombre de fruits de chaque variété.

Exercice 10

Un éleveur de poulets doit fournir journellement à chacun de ses volatils une alimentation contenant quatre produits indispensables A, B, C et D. Chaque poulet doit absorber tous les jours au moins 75 grammes de A, 30 grammes de B, 10 grammes de C et 20 grammes de D. Sur le marché, il existe deux aliments tout préparés P et Q , contenant respectivement :

- ✓ Pour P : 50% de A, 10% de B, 20% de C
- ✓ Pour Q : 30% de A, 20% de B, 40% de D

Dans quelle portion doit – on acheter les produits P et Q pour réaliser l'alimentation des poulets dans les conditions les meilleures et aux meilleures prix :

1°) Sachant que P et Q sont vendus au même prix ?

2°) Sachant que P est deux fois plus cher que Q ?

3°) Sachant que Q est deux fois plus cher que P ?

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3: VECTEURS DE L'ESPACE

Exercice 1

ABCD est un tétraèdre.

1°) Construis les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

2°) Démontre que D est le milieu de [EF].

3°) Démontre que $\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BC}$.

Exercice 2

ABCDEFGH est un cube de centre O.

On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AE} = \vec{w}$.

1°) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{OG}, \overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}$et $\vec{w}$.

2°) Construis les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u}$.

Exercice 3

ABCDEFGH est un pavé. Précise dans chacun des cas suivants si les valeurs sont coplanaires ou non.

1°) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{EG}$;

2°)$\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{FG}$;

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3°) $\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$;
4°) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{HE}$.

Exercice 4 :

Soit $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.
Démontre que les vecteurs suivants sont coplanaires.
1°) $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$; $\vec{\jmath} + \vec{k}$ et $\vec{k} + \vec{\imath}$.
2°) $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $2\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $2\vec{k} - \vec{\imath}$.
3°) $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$; $\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{k} - \vec{\imath}$.

Exercice 5

Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K et L les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD] et [DA].
On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.
1°) Donne deux points de chacune des droites :
(D_1) $(I, \vec{u} - w)$, (D_2)$(J, \vec{u} + \vec{w})$, (D_3)$(L, \vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$.
2-a) Détermine en fonction de $\vec{u}, \vec{v}$et $\vec{w}$ un couple de vecteurs directeurs de chacun des plans (AJK), (BKL), (CIK) et (DJL).
-b) Démontre que les points I, J, K et L sont coplanaires.
-c) Détermine un repère du plan (P) contenant les points I, J, K et L.

Exercice 6

Soit les vecteurs $\vec{u}(-2\,;3;\,-4)$, $\vec{v}(1\,;\,-1\,;1)$et $\vec{w}(0\,;1;-2)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{p}, \vec{q}$et $\vec{r}$ définis par :$\vec{p} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$;
$\vec{q} = 2\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$; $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.
2°) Démontre que $\vec{u}; \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exercice 7

Soit les vecteurs Soit les vecteurs $\vec{u}(-2; 1; 0)$, $\vec{v}(2; 0; -1)$et $\vec{w}(0; 1; -2)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1°) Démontre que $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$ est une base.
2°) Détermine les coordonnées de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.
3°) Un vecteur $\vec{a}$ a pour coordonnées $(2\,;\,-1\,;\,3)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Détermine les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.
4°) Un vecteur $\vec{b}$ a pour coordonnée $(-3\,;\,2\,;\,4)$ dans la base$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$. Détermine les coordonnées de $\vec{b}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Exercice 8

Soit $A(2\,;\,-1\,;\,1)$; $B(-1\,;\,1\,;\,3)$ et $C\left(\frac{7}{2}; -2\,;0\right)$ dans le repère$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1°) Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$et$\overrightarrow{AC}$ d ns la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2°) Démontre que les points A, B et C sont alignés.
3°) Détermine les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{DA} = -3\overrightarrow{DB}$.

Exercice 9

Soit les points $A(0\,;\,1\,;\,0), B(-1\,;\,0\,;\,-1), C(1\,;\,4\,;\,0)$ et $D(-3\,;\,2\,;\,-5)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
1°) Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2°) Calcule les coordonnées du vecteurs $5\overrightarrow{AB}$et $2\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3°) Déduis en que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 10

Soit les points $A(-1\ ;\ 2\ ;\ -3), B(0\ ;\ 2\ ;\ -1)\ et\ C(-1\ ;\ 1\ ;\ 0)$dans le repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Place les points A, B et C sur une figure.

2°) Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

3°) Calcule les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

4°) Calcule les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 11

Soit ABCDEFGH un pavé droit.

On désigne par I, J, K, L, M et N les centres respectifs des parallélogrammes ABCD, EFGH, ABFG, DCGH, ADHE et BCGF et par O le centre de ce pavé.

1°) Démontre que les droites (IJ), (KL), (MN) sont concourantes en O.

2°) Démontre que O est le centre de chacun des parallélogrammes ACGE et BDHF.

3°) Détermine les coordonnées de O dans le repère.

-a) (A, $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}$)

-b) (A, $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AG}$)

Exercice 12

Dans un repère de l'espace, on donne $A(2\ ;\ 1\ ;\ 3)\ ;\ B(-1\ ;\ 2\ ;\ 5), C(-2\ ;\ -3\ ;\ 1)\ et\ D(-5\ ;\ -2\ ;\ 3)$.

1°) Démontre que ces points sont les sommets d'un parallélogramme.

2°) Détermine les coordonnées de P pour que ABCP soit un parallélogramme.

3°) Détermine les coordonnées de Q pour que ABQP soit un parallélogramme.

Exercice 13

On donne trois vecteurs non coplanaires $\vec{u}; \vec{v}et\vec{w}$ de longueurs respectives 3cm, 2cm, 1cm. Soit A un point de l'espace.

1°) Construis $\vec{t} = \overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\vec{u}\ ;\ \vec{p} = \overrightarrow{BC} = \sqrt{3}\vec{v}\ ;\ \vec{q} = \overrightarrow{CD} = \sqrt{5}\vec{w}$.

2°) Détermine le vecteur $\vec{t} + \vec{p} + \vec{q}$.

3°) Construis le vecteur $\vec{k}$ défini par : $\vec{k} = -2\vec{u} + 3\vec{v} + \frac{5}{2}\vec{w}$

Exercice 14

L'espace est rapporté au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$, $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 3)\ et\ C(-2\ ;\ 1\ ;\ 4)$.

1°) Existe-t-il des points d'abscisse 3 alignés avec A et B ?

2°) Existe-t-il des points d'ordonnées 5 alignés avec A et B ?

3°) Détermine deux points coplanaires avec A, B et C.

4°) Détermine un point d'abscisse 0 et d'ordonnée 1 coplanaires avec A, B et C.

Exercice 15

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

On considère les points $A(1\ ;\ 0\ ;\ 1), B(2\ ;\ 1\ ;\ 3)\ et\ C(3\ ;\ 2\ ;5)$ dans ce repère et les vecteurs $\vec{u}(1;\ 2;-1);\ \overrightarrow{u'}(-2;\ -4;2);\ \vec{v}(3;1;0)$ et $\overrightarrow{v'}(1;\ -3;2)$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Montre que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont colinéaires.

2°) Montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ne sont pas colinéaires.

3°) Montre que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont coplanaires.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

4°) Montre que A, B et C sont alignés.

Exercice 16

Soit ABCD un tétraèdre régulier $(AB = AC = AD = BC = BD = CD)$

1°) Dans le repère de l'espace $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$, déterminer les coordonnées de A, B, C et D.

2°) Soit I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des côtés [AB], [AC], [AD], [BD], [CD] et [BC]. Déterminer les coordonnées de ces six points.

3°) Soit G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Déterminer les coordonnées de G.

4°) Déterminer les coordonnées des milieux des segments [IM], [NK] et [LJ]. Que peut-on en conclure ?

Exercice 17

On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$définis par : $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ et $\vec{v} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$.

1°) Etudie la colinéarité de ces deux vecteurs.

2°) Calcule les nombres réels α et β pour que le vecteur de coordonnée $(\alpha, 4, \beta)$ soit colinéaire à $\vec{v}$.

3°) Calcule les nombres réels a et b pour que le vecteur de coordonnée (a, b, 5) soit colinéaire à $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 18

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\vec{w}$ sont définis par les coordonnées : $\vec{u}(-2\,;1\,;3)\vec{v}(3\,;-2\,;1), \vec{w}(1\,;-4\,;5)$.

1°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$; $-2\vec{v}, \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.

2°) Calcule les nombres réels α et β pour que le vecteur $(6\,;\alpha\,;\beta)$ soit colonéaire à $\vec{u}$.

3°) Détermine trois nombres réels $a,\ b, c$ pour que le vecteur $(-5; -7\ ;\ 16)$puisse s'écrire $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$.

Exercice 19

Le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthogonal. On donne les points $A\ (-2\ ;\ 1\ ;3), B\ (1\ ;0\ ;2)et\ C\ (3\ ;1\ ;-4)$.

1°) Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ dans la base$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

2°) Calcule les coordonnées des points I, J, K, milieux respectifs des segments $[AB], [AC], [BC]$.

3°) Calcule la norme de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

4°) Calcule les distances AK, BJ et CI.

Exercice 20

Soit$A(0; 1; 0), B(-1; 0; -1)$, $C(1; 4; 0)$ et $D(-3; 2; -5)$ des points de l'espace muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.

1°) Calcule les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ et $5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.

2°) Déduis – en que les points A, B, C et D sont coplanaires.

3°) Détermine une représentation de la droite (AB) et de chacun des plans (ABC) et (BCD) puis dis ton constat.

Exercice 21

Soit $A(-1; 2; -3)$, $B(0; 2; -1)$ et $C(-1; 1; 0)$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$ de l'espace.

1°) Calcule les coordonnées des chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$ dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.

2°) Détermine les coordonnées des points I, J et K milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3°) Détermine les coordonnées du point G, centre de gravité du triangle ABC.
4-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (IJ) et du plan (ABC).
-b) Déduis – en un système d'équations cartésiennes de la droite (IJ) et une équation du plan (ABC).

Exercice 22

On définit les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ par : $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\ \ et\ \ \vec{v} = -4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 2\vec{k}$ dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.
1°) Etudie la colinéarité des vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$.
2°) Détermine les nombres réels $\alpha\ et\ \beta$ pour que le vecteur $\vec{w}(\alpha; 4; \beta)$ soit colinéaire à $\vec{v}$.
3°) Détermine les nombres réels $a\ et\ b$ pour que le vecteur $\vec{x}(a; b; 5)$ soit colinéaire à $\vec{u} + \vec{v}$.

Exercice 23

1°) $p, q\ et\ r$ sont des nombres réels. Résous dans$\mathbb{R}^3$ le système (S) d'inconnue (x, y, z) défini par :
$$\begin{cases} 2x - y + p = 0 \\ -2x + z + q = 0 \\ -y + 2z + r = 0 \end{cases}$$
Soit $\vec{u}(-2; 1; 0), \vec{v}(2; 0; -1)\ et\ \vec{w}(0; 1; -2)$ dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.
2°) Démontre que ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) est une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.
3°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\vec{\imath},\ \vec{\jmath}\ et\ \vec{k}$ dans cette base.
4°) Soit $\vec{a}(-2; 1; 3)$ un vecteur de la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$. Détermine les coordonnées de $\vec{a}$ dans la base($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$)
5°) Soit $\vec{b}(-1; -3; 2)$ un vecteur de la base ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$). Détermine ses coordonnées dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$.

Exercice 24

ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de $[AD]$, J le milieu de$[BC]$, K le milieu de $[FG]$.
1°) Montre que A, I, G et K sont coplanaires.
2°) Montre que (AK) est parallèle au plan (IHJ).

Exercice 25

ABCDEFGH est un parallélépipède. I est le milieu de$[AC]$, J le milieu de $[FH]$.
1°) Montre que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DH}$.
2°) Montre que la droite (BJ) est parallèle au plan (ACH).
3°) Montre que la droite (DJ) coupe le plan (ACH) au point O, milieu de $[JD]$.

Exercice 26

ABCDE est une pyramide dont la base BCDE est un rectangle.
1°) M est un point de l'arête $[AC]$.
-a) Trouve l'intersection de la pyramide avec le plan qui passe par M et qui est dirigé par les vecteurs$\overrightarrow{BC}\ et\ \overrightarrow{BE}$.
-b) Trouve l'intersection de la pyramide avec le plan qui passe par M et qui est dirigé par les vecteurs$\overrightarrow{AD}\ et\ \overrightarrow{AE}$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

2°) I et J sont deux points de la face (ABC) tels que (IJ) n'est pas parallèle à (BC). K est un point de la face (ADE). Trouvez l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces de la pyramide.

Exercice 27

Dans l'espace orienté muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$, on considère les points $A\ (2\ ;1\ ;\ -1)\ ;\ B\ (-2\ ;\ 4\ ;\ 3\ )\ ;\ C(10\ ;\ 4\ ;-1)$ puis dans la base $(\vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k})$, les vecteurs $\vec{u}(-2,1,2) et\ \vec{v}(1,3,-3)$.

1°) Montre que $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

2°) Donne un système d'équations paramétriques du plan P passant par A et de vecteurs directeurs$\vec{u}\ et\ \ \vec{v}$.

3°) Les points B et C appartiennent – ilsà P ?

4°) Détermine la position relative de P et de la droite (D) passant par $E(1\ ;1\ ;1)$ et de vecteurs directeur $\vec{w}(1;1;1)$.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: PRODUIT SCALAIRE

Exercice 1

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les points :
$A\ (-1\ ;1\ ;-1), B(0\ ;1\ ;0), C(2\ ;1\ ;1)$.

1°) Calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

2°) Détermine une valeur approchée, en degré, des angles : $\widehat{BAC}\ ;\widehat{CBA}\ ;\ \widehat{ACB}$.

Exercice 2

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

1°) Détermine les coordonnées des points A, B, C, D tel que AJOIBCKD soit un cube.

2°) Détermine le centre Ω de ce cube.

3°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega B}$.

4°) Déterminer une valeur approchée, en dégrée, de l'angle $\widehat{A\Omega B}$.

Exercice 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'ensemble des vecteurs de l'espace w.

Donne une expression plus simple de chacun des nombres réels suivants :

1°) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$; (3) $\|\vec{u}\|^2-6\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}\|^2$

2°) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-2\vec{u}\ .\ \vec{v}$; (4) $\|\vec{u}+2\vec{v}\|^2-\|\vec{v}\|^2$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, calcule le produit scalaire dans les cas suivants :

1°) $\vec{u}\ (1;5;3)$ et $\vec{v}\ (0;4;-1)$

2°) $\vec{u}\ (7;9;0)$ et $\vec{u}$et $\vec{v}\ (-1;2;-4)$

3°) $\vec{u}\ (-2;-2;-1)$ et $\vec{v}\ (3;5;7)$

4°) $\vec{u}\ (5;0;1)$ et $\vec{v}\ (-2;8;0)$

Exercice 5

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Dans chacun des cas suivants, détermine les coordonnées d'un vecteur normal au plan P :

1°) P : $2x + y - 4z = 0$

2°) P : $3x - 5y + 2z - 1 = 0$

3°) P : $x + y = 0$

4°) P : $x - z + 1 = 0$

5°) P : $x = -1$

Exercice 6

L'espace E est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère les points :

$A(1\,;2\,;1), B(2\,;3\,;2)\,;\ C(2;0\,;2)$.

1°) Vérifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

2°) Trouve les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

$\vec{u}$ Soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens que $\overrightarrow{AB}$; $\vec{v}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.

3° Trouver le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$) soit une base orthonormée. Quelle est l'extrémité du représentant d'origine A de $\vec{w}$. Quelles est l'extrémité D du représentant d'origine A de$\vec{w}$

Exercice 7

L'espace E est muni de la base orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1°) Détermine un vecteur normal au plan déterminé par les points

$A\ (2\,;-1\,;\ 1)\,;\ B\ (1\,;0\,;-2\,)\,;\ C(3\,;4\,;1)$.

2°) Trouve l'aire du triangle ABC.

Exercice 8

L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormé $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On donne les vecteurs $\vec{u}(0;3;2)$et$\vec{v}(5;0;2)$.

1°) Vérifie que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

2°) Détermine un vecteur non nul $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux vecteur$\vec{u}$et$\vec{v}$.

3°) Montre qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$et$\vec{v}$ si et seulement si, il est colinéaire à$\vec{n}$.

Exercice 9

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs tels que AB = 3 ; AC = 5 et mes$\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

1°) Calcule$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$

2°) ABC est un triangle rectangle en B avec AB = 5 et BC = 3

Détermine $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$

Exercice 10

$\vec{u}$ et$\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$ et $\vec{u}.\vec{v} = -1$.

Calcule $(\vec{u} + \vec{v})^2$; $(\vec{u} - \vec{v})^2$; $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v})$; $\vec{u}^2$; $(-7\vec{u} + \vec{v}).\left(\frac{1}{3}\vec{v}\right)$.

Exercice 11

1°) $\vec{u}$ et$\vec{v}$ sont deux vecteurs

a.) Développe $(\vec{u} + \vec{v})$.

b) Déduis en que $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}.\vec{v}\| - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

2°) ABCD est un parallélogramme. En utilisant la formule précédente, démontre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - AD^2)$.

Exercice 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) et on considère les points $A(2\ ;\ 5)\ ;\ B(6\ ;\ -5)\ ; C(1\ ;\ 0)$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $(\vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath})$ définis par $\vec{u}$(-3 ; 1) ; $\vec{v}(-\sqrt{2}\ ;\ 1)$ et $\vec{w}(\ \sqrt{2}\ ;\ 2)$.

1°) Calcule $\vec{u}.\vec{v}$; $\vec{u}.\vec{w}$; $\vec{v}.\vec{w}$.

2-a) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

-b) Détermine $AB, AC\ et\ BC$.

-c) Détermine cos$\hat{A}$ et une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

3-a) Rappelle la définition d'un cercle.

-b) (C) désigne le cercle de centre K(a ; b) et de rayon R.

Démontre que l'équation de (C) est sous la forme $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

-c) Détermine une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AC].

-d) Détermine le centre et le rayon du cercle (C') d'équation $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$.

Exercice 13

L'unité de longueur est le centimètre.

Dans le cube représenté ci-dessous, on considère les vecteurs $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$; $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$et $\vec{k} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ et dans le repère $(A,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath},\vec{k})$ les points M(4 ; 1 ; 4) et N(4 ; 4 ; 1).

1°) Prouve que $(A,\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath},\vec{k})$ est un repère orthonormé puis place les points M et N.

2-a)Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FM}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{FN}$ puis les longueurs FM, MN et FN.

-b) Détermine la nature du triangle MFN.

3°) On note O le milieu de [MN].

-a) Démontre que les droites (FO) et (MN) sont perpendiculaires.

-b) On note α la mesure en degré de $\widehat{FMO}$.

- Calcule cosα.
- Déduis en une valeur approchée d'un mesure de chaque angle du triangle MFN.

Exercice 14

Soit ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath},\vec{k}$) une base de l'espace.

1°) Dans chacun des cas suivants, démontre que ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) est une base de l'espace puis puis précise si elle est directe ou indirecte.

-a) $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$; $\vec{v}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\ ; 0\right)$; $\vec{w}(0\ ; 0\ ;\ -1)$.

-b) $\vec{u}\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$; $\vec{v}\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$; $\vec{w}\left(-\frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{8}\right)$.

2°) Dans chacun des cas suivants, détermine un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ;\ \vec{w})$ soit une base orthonormé directe de W.

-a) $\vec{u} = \frac{1}{9}\left(\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 4\vec{k}\right)$et $\vec{v} = \frac{1}{9}\left(-4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 7\vec{k}\right)$

-b) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\right)$

Exercice 15

L' espace est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) Dans chacun des cas chacun des cas suivants, vérifie que les points A, B et C détermine un plan puis détermine l'équation cartésienne de ce plan.
-a) $A(-1\,;\,1\,;\,1)\,;\,B(1\,;\,-1\,;\,1)\,;\,C(1\,;1\,;\,-1)$
-b) $A(2\,;\,1\,;\,0)\,;\,B(-3\,;\,0\,;\,2)\,;\,C(0\,;\,5\,;\,-1)$.
2°) Dans chacun des cas suivant, dis si les points A, B, C et D sont coplanaires.
-a) $A(1\,;\,2\,;\,0)\,;\,B(0\,;\,6\,;\,2)\,;\,C(-1\,;\,0\,;\,-6)\,;\,D(1\,;\,3\,;\,1)$.
-b) $A(1\,;\,2\,;\,1)\,;\,B(2\,;\,1\,;\,1)\,;\,C(0\,;\,-1\,;\,1)\,;\,D(2\,;\,4\,;\,1)$
-c) $A(0\,;\,1\,;\,1)\,;\,B(1\,;\,0\,;\,0)\,;\,C(-1\,;\,2\,;\,1)\,;\,D(0\,;\,1\,;\,2)$.

Exercice16

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1, I le milieu de $[AB]$ et J le projeté orthogonale de I sur le plan (BCD).
1°) Démontre que l'ensemble des points M du plan (BCD) tels que $MA^2 + MB^2 = 1$ est le cercle de centre J passant par B
2°) Détermine, suivant le nombre réel k, la nature de l'ensemble des points M du plan (BCD) tels que $MA^2 + MB^2 = k$.
3°) Démontre que la fonction qui, à tout point M du plan (BCD), associe le nombre réel $MA^2 + MB^2$ prend sa valeur minimale au point J.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°5: GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Exercice 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les plans A$\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$,
B$\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ $et\ C\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$.Détermine une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonale à la droite (AB).

Exercice 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on n considère les points
A$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} et\ C\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.
1°) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).
2°) Détermine une équation du plan passant par O et parallèle au plan (ABC).

Exercice 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
1°) Détermine le nombre réel k pour que le plan (P_k) d'équation cartésienne $2x - y + z - k = 0$ passe par le point A de coordonnées $(-2\,;0\,;\,-4)$.
2°) Démontre que les plans (P_k) sont parallèles entre eux.

Exercice 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
Soit (P) le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 6 = 0$.
1°) Détermine trois points de (P) dont les coordonnées (x,y,z) sont des nombres entiers relatifs.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

2°) Place ces points sur une figure.

Exercice 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite passant par les points $A\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$.

1°) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).
2°) Détermine les coordonnées des points d'intersection de (AB) avec chacun des plans de repères $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}),(O,\vec{\jmath},\vec{k}),(O,\vec{k},\vec{\imath})$.

Exercice 7

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$
1°) Détermine une représentation paramétrique de chacune des droites (OA), (OB) et (AB).
2°) Détermine une représentation paramétrique du plan (OAB).

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.Détermine l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que :

1°) $\begin{cases}x=-3+2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ 2°) $\begin{cases}x=-3+2\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=-\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R}^{+})$.

Exercice 9.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$et on considère le plan (P) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1-3\lambda\\ y=-1-2\lambda+2\mu\\ z=1+6\mu\end{cases}$ $((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$.

1°) Détermine les coordonnées des points d'intersections de (P) avec les axes du repère.
2°) Détermine une équation cartésienne de (P).

Exercice 10

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-5+3\lambda\\ y=5-4\lambda\\ z=-15+12\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$.

1°) Vérifie que les points $A\begin{pmatrix}-2\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-3\\9\end{pmatrix}$ appartient à la droite (D).
2°) Détermine les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite (D) tels que : $AM_1 = AM_2 = 13$.

Exercice11

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère le plan (P) de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1+2\lambda-\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=2+\lambda-2\mu\end{cases}$ $((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) Démontre que les points A$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$ $et\ C\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ appartiennent au plan (P).

2°) Détermine $\lambda\ et$ μ pour que le point de paramètre $\lambda\ et$ μ soit le centre de gravité du triangle ABC.

Exercice 12

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les pointsA$\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $et\ C\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$ puis le plan (P) d'équation cartésienne $3x-4y+6=0$.

1°) Calcule la distance du point A au plan (P).

2-a) Détermine une équation cartésienne de l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $tels\ que\ MB=MC$.

-b) Détermine la nature de cet ensemble.

Exercice 13

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère le plan (P) le plan d'équation cartésienne $x+4y-z-4=0$, la droite (D) de système d'équations cartésiennes $\begin{cases}x-y=0\\y-z=0\end{cases}$ et les points A$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $et\ C\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

1°) Détermine un point M de (D) tel que : $d\ (M,(\ P\ )\ )=2$.

2°) Calcule la distance du point O au plan (ABC).

Exercice 14

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les plans$(P_1)et\ (P_2)$ d'équations cartésiennes repectives $x+y+z=0\ et\ x+y-2z+1=0$ et les droites $(D_1)et\ (D_2)$ les droites de représentations paramétriques respectives$\begin{cases}x=-\propto\\y=\propto\\z=\propto\end{cases}$, $(\propto\in\mathbb{R})$et $\begin{cases}x=2-2\mu\\y=1-\mu\\z=-\mu\end{cases}$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

1-a) Démontre que $(P_1)et\ (P_2)$ sont sécants

-b) Détermine une représentation paramétrique de leur droite d'intersections.

2°) Démontre que $(D_1)et\ (D_2)$ sont non coplanaires.

3°) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant (D_2) et parallèle à (D_1).

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les droites $(D)\ et\ (D')$ de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases}x=2-3\lambda\\y=5-\lambda\\z=-3+2\lambda\end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ et $\begin{cases}x=2+\mu\\y=1+\mu\\z=-1-\mu\end{cases}$ $(\mu\in\mathbb{R})$.

1°) Démontre que $(D)\ et\ (D')$sont sécants.

2°) Détermine une équation cartésienne du plan déterminé par ces deux droites.

Exercice 16

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère le plan (P) d'équation cartésienne $x+y+z=0$.

1°) Détermine une équation cartésienne du plan passant par le point A$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et parallèle à (P).

2-a) Détermine une représentation de la droite (D) passant par A et orthogonale à (P).

-b) Déterminele point d'intersection de (D) et (P).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Exercice 17

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $x-y+3=0$ et (D) la droite qui a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} x-z-2=0 \\ 2x+y-3z+1=0. \end{cases}$

1°) Démontre que (D) est parallèle à (P).
2°) Détermine une équation cartésienne du plan (II) contenant (D) et perpendiculaire à (P).
3°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ), intersection de (P) et (Q).

Exercice 18

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{cases}$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ et (D') la droite qui a pour système d'équation $\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x+y-z=0. \end{cases}$

1°) Démontre que ces droites ne sont pas coplanaires.
2°) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant (D) et parallèles à (D').

Exercice 19

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère la droite (D) qui a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=0. \end{cases}$

1°) Détermine un système d'équations cartésiennes de la (D') passant par le point A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et parallèle à (D).
2°) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant (D) et (D').

Exercice 20

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit (P) plan de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$, où A$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis (D) et (D') les droites de systèmes d'équations cartésiennes respectives: $\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=6. \end{cases}$

1°) Détermine l'intersection de (P) et (D)
2°) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par le point A$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et orthogonale à (D').
3°) Détermine l'intersection de (Q) et (D').
4°) Détermine l'intersection de (P) et (Q).

Exercice 21

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Soit (P) le plan d'équation $2x+3y+z+1=0$, (P') le plan de représentation paramétrique $\begin{cases} x=1+2\lambda+\mu \\ y=2-\lambda+\mu \\ z=-\lambda-5\mu \end{cases}$ $,((\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2)$ et (D) et (D') les droites qui ont respectivement pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 4x-y-z+2=0 \\ y-z-2=0. \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+1=0 \\ x-2z=0. \end{cases}$

1°) Etudie la postion relative des plans (P) et (Q).
2°) Etudie la position relative des droites (D) et (D') .
3°) Détermine l'intersection de (P) et (Q) puis de (D) et (D').

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

EVALUATIONS PONCTUELLES D'ETAPE

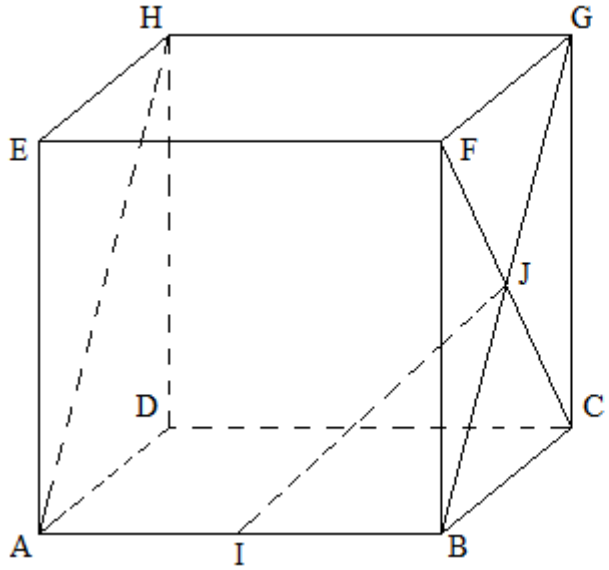
CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N° 1
ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Evaluation ponctuelle d'étape n°1

Contexte

Le buffer de GOHOU Michel a la forme d'un cube ABCDEFGH d'arête a avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ représenté ci – dessous.



Intéressé par le dessin, Adissa le fils de GOHOU, professeur de mathématiques au lycée la comédie se propose de contrôler le niveau de mîtrise de certaines connaissances relatives à l'orthogonalité dans l'espace dans une classe de première scientifique.

Tâche : Tu vas subir ce contrôle en tant qu'élève en première scientifique en répondant aux questions suivantes

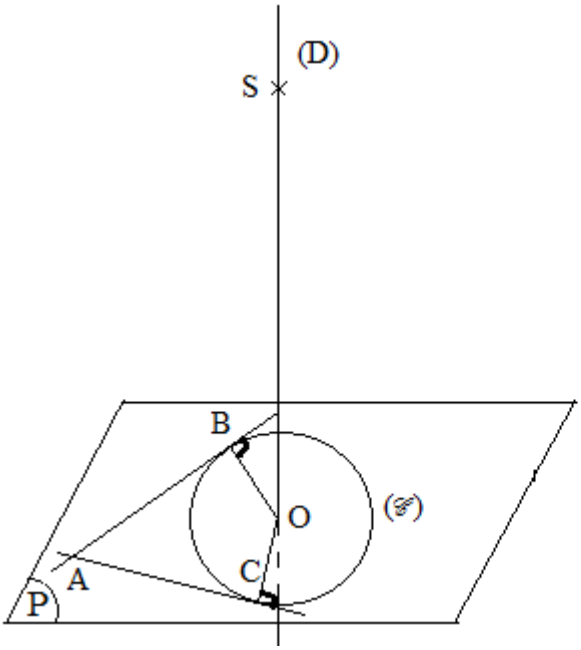
1-a) Démontre que la droite (FC) est orthogonale au plan (ABG).
 -b) Déduis – en que les plans (ABG) et (EFC) sont perpendiculaires.
2-a) Démontre que le quadrilatère ABGH est un rectangle.
 -b) Exprime en fonction de a les dimensions du rectangle ABGH.
 -c) Calcule l'aire de la surface du domaine délimité par ce rectangle.
3-a) Démontre que IJH est un triangle rectangle.
 -b) Calcule l'aire de la surface du domaine délimité par ce triangle.

Evaluation ponctuelle d'étape n°2

Contexte

Pour installer le mât d'un nouveau collège, le directeur de ce collège a consulté un géomètre de la place et ce dernier lui a proposé le plan ci – dessous.

COSSOU
CONCEPTION DU PRO



La droite (D) est l'axe du drapeau

Le point O est le centre du cercle (𝒞) délimitant la zone de ceinture de l'axe.

A est un point extérieur au cercle (𝒞)

Les droites (AB) et (AC) sont tangentes au cercle (𝒞) respectivement en B et C.

On rappelle que la droite (D) est perpendiculaire au plan (P).

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.
1°) Démontre que les plans (SBO) et (SAB) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que les plans (SCO) et (SAC) sont perpendiculaires.
3°) Démontre que les droites (SA) et (BC) sont orthogonales.
4°) Démontre que les plans (SAO) et (SBC) sont perpendiculaires.
5°) Détermine l'image de chacun des points A, B et C par la projection orthogonale sur la droite (D).

Evaluation ponctuelle d'étape n°3

Contexte

Pour évaluer ses élèves d'une première C, leur professeur leur présente une situation à traduire sous forme de figure puis répondre à certaines questions relatives à la figure. La situation se présente comme suit :
Dans un plan (P), construis un losange ABCD de centre O. On désigne par (Δ) la droite passant par O et perpendiculaire au plan (P) et S un point de (Δ) distinct de O.
Tâche : Pour ton évaluation, tu vas traduire cette situation en une figure puis répondre aux questions à la place des élèves de ce professeur.
1°) Fais la figure.
2-a) Démontre que (AC) et (SB) sont orthogonales.
-b) Démontre que (AC) et (SD) sont orthogonales.
3-a) Démontre que (BD) et (SA) sont orthogonales.
-b) Démontre que (BD) et (SC) sont orthogonales.
4°) Démontre que les plans (SAC) et (SAD) sont perpendiculaires.

Evaluation ponctuelle d'étape n°4

Contexte

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE GOSSOU

ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB], [BF]\ et\ [FG]$.Toli se propose de fabriquer à partir de ce cube un polygone régulier dont certains sommets sonty les points I, J et K. Très vite, Toli est confronté à des difficultés.

Tâche : Tu vas aider Toli à travers les questions suivantes :

1°) Représente ce cube en perspective cavalière avec les points I, J et K.

2°) Démontre que I, J et K déterminent un plan (P).

3-a) Démontre que $IC = JC = KC$

-b) Démontre que $IE = JE = KE$

-c) Démontre que le plan (P) est le plan médiateur du segment $[EC]$

4°) Démontre que la section du cube par le plan (P) est un hexagone régulier.

Evaluation ponctuelle d'étape n°5

Contexte

ABCD est un rectangle d'un plan (P). (Δ) est la droite perpendiculaire au plan (P) en C et (Δ') la perpendiculaire à (P) en D. M et N sont des points de l'espace appartenant respectivement aux droites (Δ) et (Δ') telles que les droites ((AN) et (BM) soient orthogonales.

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.

1°) Réalise une figure.

2-a) Démontre que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (BMC).

-b) Déduis – en la position relative des droites (AB) et (BM).

3-a) Démontre que la droite (BM) est perpendiculaire au plan (ABN).

-b) Déduis – en que la droite (AN) est perpendiculaire au plan (ABM).

4°) Détermine la nature de chacun des triangles $ABN, ABM, AMN\ et\ BMN$.

Evaluation ponctuelle d'étape n°6

Contexte

Lors d'un contrôle rigoureux en mathématique dans les séries scientifiques, les apprenants d'une première C ont été soumis à une évaluation ponctuelle d'étape dont le sujet se présente comme suit. : PQRSTUVW est un cube d'arrête 5cm avec un point A du segment [TW] et B le centre de la face SRVW puis on désigne par p la projection orthogonale sur la droite (SV).

Tâche: Pour ton évaluation tu vas répondre aux questions suivantes.

1°) Définis clairement :

-a) Droite et plan orthogonaux

-b) plans perpendiculaires

-c) Projection orthogonale sur une droite

2°) Fais une représentation en perspective cavalière du cube puis place les points A et B.

3-a) Démontre que la droite (SV) est orthogonale au plan (TQR).

-b) Déduis – en que

- ✓ Les plans (QRW) et (UVS) sont perpendiculaires

CONCEPTION : PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

- ✓ La droite (SV) est orthogonale à la droite (AB)

4-a) Précise l'ensemble des points invariants par p.

-b) Détermine $p(A)$, $p(T)$, $p(Q)$, $p(W)$ et $p(R)$.

Evaluation ponctuelle d'étape n°7

Contexte Le trophée des nanties

Le trophée des nanties est en or et a la forme d'un tétraèdre régulier ABCD. Intéressé par la configuration de ce trophée, Godath se propose de l'exploiter pour contrôler le niveau de maîtrise de connaissancee relatives à l'orthogonalité dans l'espace chez les élèves d'une première scientifique. Pour cela, il désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD] et pose les questions suivantes.

1°) Fais une figure.

2°) Démontre que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (ICD).

3-a) Démontre que les plans (ICD) et (ABC) sont perpendiculaires.

-b) Démontre que les plans (ICD) et (ABD) sont perpendiculaires.

4-a) Démontre que les plans (JAD) et (ABC) sont perpendiculaires.

-b) Démontre que les plans (JAD) et (BCD) sont perpendiculaires.

5°) Démontre que les arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.

Tâche : Pour ton évaluation tu vas répondre aux questions à la place des élèves de ce professeur.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°2: SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

Evaluation ponctuelle d'étape n°1

Contexte

Pour ravitailler sa boutique en biscuits, la jeune commerçante Patricia achète trois types de biscuits : biscuitssalées, biscuits sucrés et biscuits chocola. Dans un premier temps, elle a acheté 40 biscuits salés, 40biscuits sucrés et 25 biscuits chocolas à 5000F. Dans un deuxième, elle achète 35 biscuits salés, 25 biscuitssucrés et 30 biscuits chocolas 5125F.

Enfin elle à payer 20 biscuits salées 35 biscuits surcrés et 40 biscuits chocolas à 6250F. Du retour du marché Patricia a des difficultés pour faire le point à sa Maman par ce qu'elle a oublié le prix unitaire de chaque type de biscuits

Tache : Tu vas aider Patricia à connaître prix unitaire de chaque type de biscuitsen répondant aux questions suivantes :

1°) Résous dans $\mathbb{R}^3$le système $\begin{cases} 8x + 6y + 5z = 1000 \\ 7x + 5y + 6z = 1025 \\ 4x + 7y + 8z = 1250 \end{cases}$

2-a) Traduis le problème relatif aux biscuits par un système de trois équations à trois inconnus

-b) Déduis-en le prix unitaire de chaque biscuits

CONCEPTION PROF ESTHER THEOPHILE D. GOSSOU

Evaluation ponctuelle d'étape n°2

Contexte

Détermine un nombre entier naturel de trois chiffres sachant que :

- ✓ La somme de ses chiffres est égale 12
- ✓ Si l'on permute le chiffre des certaines et celui dizaines, le nombre augmente de 90.
- ✓ Si on permute le chiffre des unités et celui des dizaines, le nombre augmente de 9.

Evaluation ponctuelle d'étape n°3

Contexte

Détermine un nombre entier naturel de quatre chiffres sachant que :

- ✓ La somme de ses chiffres est 14
- ✓ Si l'on permute le chiffre des dizaines et celui des millièmes le nombre démunie de 4950
- ✓ Le chiffre des millièmes est le triple de celui des centaines
- ✓ Le nombre est divisible par 5 mais pas divisible par 10.

Evaluation ponctuelle d'étape n°4

Contexte

1°) Résous dans $\mathbb{R}^3$ le système suivantes.

$$(S_1):\begin{cases} x+2y-z=8 \\ 2x+y+2z=-2 \\ x+y+3y=-6 \end{cases} \quad (S_2):\begin{cases} 2x-y+z=10 \\ x+3y-4z=0 \\ x+y+z=15 \end{cases}$$

2°) Déduis-en la résolution de chacun des systèmes suivants :

$$(S_3):\begin{cases} \sqrt{x+2}+2|y-1|-\frac{1}{z+1}=8 \\ 2\sqrt{x+2}+|y-1|\frac{2}{z+1}=-2 \\ \sqrt{x+2}+|y-1|+\frac{3}{z+1}=-6 \end{cases} \quad (S_4):\begin{cases} 2x^2-|y|+z^2=10 \\ x^2+3|y|-4z^2=0 \\ x^2+|y|+z^2=15 \end{cases}$$

Evaluation ponctuelle d'étape n°5

Contexte

Trois capitaux C_1, C_2 *et* C_3 dont la somme est égale à 320 000F sont respectivement placées à des taux d'intérêts annuel de 6%; 5% *et* 4% pendant un an. L'intérêt du capitale dépose à 6% dépasse de 1500F celui du capitale dépose à 5%; l'intérêt du capitale dépose 5% depasse de 3000F celui du capitale dépose à 4%.

1°) Traduis ces hypothèses par un système de trois équations à trois inconnues

2°) Résous ce système

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3°) Déduis – enles valeurs de $C_1, C_2\ et\ C_3$.

SEQUNCE D'APPRENTISSAGE N°3: VECTEURS DE L'ESPACE

Evaluation ponctuelle d'étape n°1

Contexte

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $(2\ ;\ 1\ ;\ 3)$, $(3\ ;\ 2\ ;\ 5)$. Soit dans la base $(\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}, \vec{v}, \overrightarrow{v'}$ de coordonnées respectives $(1\ ;\ 2\ ;\ -1)\ ;\ (-2\ ;\ -4\ ;\ 2)\ ;\ (3\ ;\ 1\ ;\ 0)$, $(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre qux questions suivantes.

1-a) Montre que $\vec{u}\ et\ \overrightarrow{u'}$ sont colinéaires

-b) Montre que $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas collinaires

-c) Montre que $\vec{u},\ \vec{v}\ et\ \overrightarrow{v'}$ sont coplanaires

2°) Montre que les points A, B et C sont alignés

3°) Soit P le plan passant par A et de vecteur directeur , $\vec{u}\ et\ \vec{v}$.

4°) Soit (P') le plan passant par B et de vecteur directeur, $\vec{u}'\ et\ \overrightarrow{v'}$. Que peux – tu dire des plans $(P)\ et\ (P')$?

5°) Détermine les points d'intersections des plans $(P)\ et\ (P')$ avec les axes du repère.

6°) Détermine les intersections des plans $(P)\ et\ (P')$ avec le plan passant par O et de vecteur directeurs $\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OC}$

Evaluation ponctuelle d'étape n°2

Contexte

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k})$ et on considère les points $A, B, C\ et\ D$de coordonnées respectives $(1\ ;\ 2\ ;-3)\ ;\ (3\ ;\ 1\ ;-1), (1\ ;2\ ;3)\ et\ (0\ ;\ 1\ ;1)$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.

1-a) Montre que ces trois points déterminent un plan (P).

-b) Donne un système d'équations paramétriques de (P).

2-a) Donne un système d'équations paramétriques de la droite (Δ) passant par D et parallèle à (AB).

-b) Détermine les coordonnées de E tel que ABED soit un parallélogramme.

3°) Détermine les points d'intersections de (P) avec les axes du repère

4°) Détermine l'intersection de (P) et de la droite (OD)

Evaluation ponctuelle d'étape n°3

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Contexte

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On considère dans ce repère les points $A(2\ ;\ 1\ ;\ -1) : B(-2\ ;4\ ;3)\ ;\ C(10\ ;\ 4\ ;\ -1)$ et dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ les vecteurs $\vec{u}(-2; 1; 2)$ $et\ \vec{v}(1; 3; -3)$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.

1°) Montre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas collinaires

2°) Donne un système d'équations paramétriques du plan (P) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}\ et\ \vec{v}$.

3°) Les points B et C appartiennent – ils à (P)

4°) Détermine la position relative de (P) et de la droite (D) passant par le point $E\ (1; 1; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{w}\ (1; 1; 1)$.

Evaluation ponctuelle d'étape n°4

Contexte

Soient $A, B, C\ et\ D$ quatre points non coplanaires et E tel que BDCE soit un parallélogramme. Soient B', C', D' les milieux de $[AB], [AC]\ et\ [AD]$. Soient I le milieu $[BE]$.

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.

1°) Montre que les droites (EB) et (C'D') sont parallèles.

2°) Les droites (BC') et (ID') sont – elles sécantes ou non coplanaires ?

3°) Que peut – on dire des plans $(B'C'D')\ et\ (BCD)$?

4°) On mène par le point B' une droite parallèle à la droite (ED). Détermine l'intersection de cette parallèle avec le plan (ACD).

5°) On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1°) Donne les coordonnées des différents points de la figure dans ce repère.

2°) Démontre analytiquement les résultats des questions 1, 2, 3 et 4.

Evaluation ponctuelle d'étape n°5

Contexte

On considère un tétraèdre ABCD et les points E et F, milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[AB]$.

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.

1°) Définis à l'aide d'égalités vectorielles les points G, H et I centres de gravités des triangles ABC, ABD et ABE.

2°) Montre que les points E, G, H et I appartiennent au plan (FDC).

3-a) Montre que G, H et I sont alignés.

-b) Montre que (GI) et (DC) sont parallèles.

-c) Calcule GH et GI en fonction de DC.

4-a) Donne les coordonnées des points de la figure relativement au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

-b) Démontre analytiquement les résultats du 1,2 et 3.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4
PRODUIT SCALAIRE

Evaluation ponctuelle d'étape n°1

Contexte :

On considère un cube ABCDEFGH de centre O et d'arête a avec $a \in \mathbb{R}_+^*$. On désigne par I,J et K les points définis par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{JC} = -\frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KF} = \vec{0}$.

Tache : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1°) Réalise une figure en perspective cavalière ou le cube est posé sur la face ABCD et de la face ABEF est situé dans le plan verticale de face. Puis place les points I,J et K.

2-a) Donne la valeur des produits scalaires suivant : $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}$

-b) Déduis-en les valeurs des produits scalaires $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{IJ}$

3°) Calcule en fonction de a les longueurs des cotés du triangle IJK.

4°) Calcule le volume du tétraèdre IJKB

5-a) Représente en perspective le solide obtenu après avoir enlevé ce tétraèdre

-b) Calcule son aire totale de deux manières différentes.

Evaluation ponctuelle d'étape n°2

Contexte :

On considère une pyramide à base carrée de coté a ou a est un nombre réel strictement positif. L'arrête $[SA]$ de longueur a est la hauteur de la pyramide.

Tache :

Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1°) Démontre que les droites $(SC)et\ (BD)$ sont orthogonales

2°) On coupe la pyramide par le plan contenant (BD) et orthogonales en E à la droite (SC).

-a) Représente la figure en perspective cavalière.

-b) Fais l'épure de la figure en prenant ABCD comme plan horizontale et un plan parallèle à (SAC) frontal.

3°) Calcule les longueurs des cotés et les mesures des angles du triangle BDE.

Evaluation ponctuelle d'étape n°3

Contexte :

On considère un tétraèdre régulier ABCD dont les arrêtes ont pour longueur a ou a un nombre réel strictement positif. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des segments$[AD], [BC]$ et $[EF]$.

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1-a) Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-b) Déduis-en la positive relative des droites (AB) et (CD).

2-a) Démontre que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

-b) Déduis – en la longueur EF

3-a) Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{BC}$

-b) Déduis-en que le droite (EF) est perpendiculaire aux droite (AD) et (BC)

4-a) Démontre que $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

-b) Déduis-en que la longueur DG.

-c) Montre que la droite (DG) est orthogonale au plan (ABC).

Evaluation ponctuelle d'étape n°4

Contexte :

On considère dans l'espace E un triangle ABC et son centre de gravité G et par I le milieu de $[BC]$. On désigne par f l'application de l'espace dans $\mathbb{R}_+$ définie par $f(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. On pose $AB = 3cm; AC = 4cm; BC = 5cm$

Tache : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1-a) Démontre les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

2-a) Calcule $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI^2 et de BC^2

-b) Déduis-en la valeur de AG^2

-c) Détermine alors les valeurs de BG^2 et de CG^2

3°) Démontre que f admet un minimum à préciser.

4°) Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que $f(M) = AB^2 + AC^2 + BC^2$.

Evaluation ponctuelle d'étape n°5

Contexte :

On considère dans l'espace l'application dans $\mathbb{R}$ définie par $f(M) = -3MA^2 + 5MB^2$ et le point K tel que $-\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KB} = \vec{0}$. On se propose de déterminer dans le cas ou $AB = \frac{16}{17}cm$ l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $f(M) = 43$ ou $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Tâche : Tu vas répondre aux questions suivantes.

1°) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$

2°) Calcule $f(K)$

3°) Démontre que f admet un extremum à préciser.

4°) Détermine la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

Evaluation ponctuelle d'étape n°6

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Contexte :
On considère dans l'espace les applications f et g de l'espace dans $\mathbb{R}$ définies par : $f(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ et $g(M) = (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB}).(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})$ ou $A; B$ et C sont des points de l'espace

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1-a) Démontre que $f(M) = MO^2 - \frac{1}{4}AB^2$

-b) Déduis – en que f admet un minimum à préciser

2-a) Démontre que $g(M)$ est indépendant des points A ;B et C.

-b) Démontre qu'il existe un point P de l'espace tel que $g(M) = -MP^2 + \frac{1}{4}IJ^2$

-c) Déduis – en que g admet un maximum à préciser O, I et J sont des points de l'espace tels que O est le milieu de $[AB], \overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Evaluation ponctuelle d'étape n°7

Contexte :
On considère dans l'espace deux points A et B et l'application h de l'espace dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout point M de l'espace, on a : $h(M) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}$. On se propose de déterminer l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $h(M) = K$ou K est un nombre réel donné. Pour cela ; on désigne par H le projeté orthogonale de M sur la droite (AB).

Tâche : Réponds aux questions suivantes

1°) Démontre que $h(M) = \overline{AB} \times \overline{AH}$

2°) Donne alors l'expression de $\overline{AH}$

3°) Détermine alors la nature et les éléments caractéristiques de (Γ).

4°) On donne maintenant $AB = 5cm$ et on considère l'application g de l'espace dans $\mathbb{R}$ définies par$g(M) = MA^2 - MB^2$.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°5: GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Evaluation ponctuelle d'étape n°1

Contexte :
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points :
$A(5\,;-5\,;2)\,;\ B(-1\,;1\,;0)\,;\ C(O\,;1\,;2)et\ D(6\,;\ 6\,;\ -1)et\ le\ vecteur\ \vec{n}(-2;3;1)$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1-a) Détermine la nature du triangle BCD puis calcule son aire.

2-a) Prouve que $\vec{n}$ est un vecteur normal du plan (BCD).

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (BCD).

3-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (BCD).

CONCEPTION PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-b) Détermine les coordonnées du point d'intersection H du plan (BCD) et de la droite (Δ)
-c) Déduis – en le volume du tétraèdre ABCD.

Evaluation ponctuelle d'étape n°2

Contexte :

L'espace est muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère les points :
$A(1\,;-2;1)\,;\ B(2\,;3\,;2)\ et\ C(2\,;0\,;2)$ et les droites $(\Delta) et\ (\Delta')$ définies par :

$(\Delta):\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+2, \\ z=2t+3 \end{cases} t\in\mathbb{R} \quad (\Delta'):\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z-1}{4}$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1°) Vérifie les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.
2°) Trouve deux vecteurs unitaires $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ respectivement colinéaires et de même sens que $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$.
3-a) Détermine une représentation paramétrique de chacune des droites $(AB) et (AC)$ puis du plan (ABC).
-b) Déduis-en une équation cartésienne du plan (ABC).
4-a) Démontre que les droites $(\Delta) et\ (\Delta')$ sont strictement parallèles
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) contenant $(\Delta) et\ (\Delta')$.
-c) Détermine $(Q)\cap(ABC)$

Evaluation ponctuelle d'étape n°3

Contexte :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points :
$A(1\,;0;1)\,;\ B(0\,;1\,;2)\ et\ C(1\,;-2\,;0)\ et\ la\ plan\ (P)$ d'équation $3x-2y+z-2=0$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes.

1-a) Vérifie que $A\notin(P)$
-b) Calcule la distance du point A au plan (P)
-c) Détermine les coordonnées du projeté orthogonale H du point A sur le plan (P).
2-a) Prouve que les points A, B et C ne sont pas alignés
-b) Ecris une représentation paramétrique du plan (ABC).
-c) Déduis – en l'équation cartésienne du plan (ABC).
3-a) Démontre que les plans (P) et (ABC) sont perpendiculaires
-b) Donne l'intersection des plans (P) et (ABC) puis caractérise – le.

Evaluation ponctuelle d'étape n°4

Contexte :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points :

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

$A(2;6;6)$; $B(-2;-4;-4)$; $C(-1;7;-4)$ et $D(3;7;4)$ et le plan (P) de representation paramétrique $\begin{cases} x = 3+\propto -3\beta \\ y = 2 \propto +3\beta \\ z = 2-\propto \end{cases}$ ou $\propto$ et β sont des nombres réels et la droite (Δ) de système d'équation cartésiennes $\begin{cases} x+y-z-3=0 \\ x-y+3z+3=0 \end{cases}$

Tâche : Pour ton évaluation, tu es invité (e) répondre aux questions suivantes :

1°) Détermine une équation cartésienne de la sphère (S) passant par les points A, B, C et D puis précise ses éléments caractéristiques

2°) Détermine une équation cartésienne du plan (P).

3°) Détermine une représentation paramétrique de (Δ).

4°) Détermine les ensembles suivants

-a) $(P) \cap (\Delta)$

-b) $(S) \cap (\Delta)$

-c) $(S) \cap (\Delta)$

-d) $(S) \cap (P) \cap (\Delta)$.

Evaluation ponctuelle d'étape n°5

Contexte :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère :

- ✓ Le plan (P) d'équation $x-2y-2=0$
- ✓ Le plan (Q) d'équation $2x+y-z+5=0$
- ✓ La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1-\propto \\ y = \propto \\ z = 1+\propto \end{cases}$ $\propto \in \mathbb{R}$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1-a) étudie la position relative des plans (P) et (Q).

-b) Caractérise $(P) \cap (\mathbb{Q}) = (D)$.

2-a) Démontre (Δ) est incluse dans (P)

-b) Etudie la position de (Δ) et de (Q).

-c) Etudie la position de (Δ) et (D).

3°) Détermine une équation cartésienne du plan (R) contenant (Δ) et perpendiculaire à (P).

Evaluation ponctuelle d'étape n°6

Contexte :

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ et on considère :

- ✓ La droite (Δ) de système d'équations cartésienne $\begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+14=0 \end{cases}$
- ✓ La famille (P_m) d'équation cartésienne : $(2-m)x+(1+m)y+(2m-1)z+2+m=0$

Tâche : Pour ton évaluation, tu vas répondre aux questions suivantes :

1°) Justifie que pour tout nombres réels m, (P_m) est un plan de l'espace.

2°) Démontre que tous les plans (P_m) contiennent une droite (D) que tu caractériseras.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3-a) Détermine un repère de (Δ)

-b) Etudie la position relative de (Δ) et (P_O).

-c) Détermine $(\Delta) \cap (D)$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

QUELQUES PROBLEMES

CONCEPTION DU PROFESSEUR ADOCHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°1: ORTHOGONALITE DANS L'ESPACE

Problème 1

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a où a est un ombre réel strictement positif.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [AD], [AB] et [DC].
1-a) Calcule les longueurs ID et IA en fonction de a.
-b) Déduis – en la nature du tringle ADI.
2°) Démontre que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AD).
3°) Démontre que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (BC).
4°) Calcule la longueur IJ en fonction de a.
5°) Démontre que $IJ = Kl$
6-a) Démontre que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.
-b) Démontre que $IL = Jk = JL$
-c) Déduis de la question a que les points I, J, K et L sont coplanaires.
-d) Déduis des questions précédentes la nature du quadrilatère IJKL
7°) Les droites (IJ) et (LK) se coupent en O. Calcule la longueur OA en fonction de a
8-a) démontre que O est équidistant des points A, B, C et D.
-b) Déduis – en le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Problème 2

ABCDEFGH est un cube d'arrête a, a$\in \mathbb{R}_+^*$ et on désigne par I le point d'intersection de (AH) et (DE).
1-a) Démontre que les plans (AGI) et (DEG) sont perpendiculaires.
-b) Démontre l'intersection de ces deux plans.
2°) Soit A' le projeté orthogonale de A sur (GI)
-a) Démontre que A' est le projeté orthogonale de A sur le plan (DEG).
-b) Démontre que dans le plan (AGI) les triangles AA'I et GHI sont semblables.
-c) Exprime en fonction de a la distance du point A au plan (DEG).
-d) Démontre que IA' = $\frac{1}{3}$IG .
-e) Démontre que les plans (AFC) et (DEG) sont parallèles puis exprime la distance de ces deux plans en fonction de a.
3°) Soit J le milieu de [DG] et C' le projeté orthogonale du point C sur le plan (DEG)
-a) Démontre que C' appartient à (EJ) et JC' = $\frac{1}{3}$EJ
-b) Détermine l'image de la droite (AC) par la projection orthogonale sur le plan (DEG). Cette image est-elle parallèle à (AC) ? Justifie ta réponse.
4°) Soit K le centre de gravité du triangle DEG.
-a) Démontre que K appartient à (BH) et que K est le projeté orthogonal commun des points B et H sur le plan DEG.
-b) Exprime en fonction de a la distance du point B au plan (DEC) et celle du point H à ce plan.
5-a) Détermine le projeté orthogonal du point F sur le plan DEG
-b)Exprime en fonction de a la distance du point F au plan (DEG)

Problème 3

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Soit ABCDEFGH un cube d'arête de longueur a où a est un nombre réel strictement positif et O le centre du carré ABCD. Soit I le milieu du segment [BC] .

1-a) Démontre que le quadrilatère EBCH est un parallélogramme puis place le point O', centre de ce parallélogramme.

-b) Calcule BE en fonction de a.

-c) Déduis des questions précédentes EBCH est un parallélogramme particuler à préciser.

-d) Déduis de la question c que les droites (Ce) et (BH) sont orthogonales.

2-a) Démontre que les droites (OO') et AE sont parallèles.

-b) Déduis – en que la droite (OO') est orthogonale au plan (ABC).

3°) on considère la projection orthogonale p sur le plan (ABC).

-a) Détermine $p(O'), p(B) et\ p(C)$.

-b) Détermine $p(\widehat{BO'C})$

-c) Peux – tu affirmer que le projeté orthogonal d'un angle non droit n'est jamais un angle droit.

4°) On appelle α la mesure de l'angle en degré de l'angle $\widehat{BO'C}$.

-a) Démontre que les droites (O'I) et (EB) sont parallèles.

-b) Déduis – en que $mes\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$

-c) Calcule $tan\frac{\alpha}{2}$ puis déduis – en une valeur approchée de α à 10^{-1} près par défaut.

Problème 4

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = a\ et\ BC = 2a$ où a est un nombre réel strictement positif. H est le point [AC] tel que $CH = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Sur une demi – droite [Hz) perpendiculaire en H au plan du triangle ABC, on considère le point S tel que l'angle $\widehat{CSA}$ est droit.

1-a) Démontre que les faces du tétraèdre SABC sont des triangles rectangles.

-b) Calcule en fonction de a la longueur de chacune des arêtes de ce tétraèdre.

-c) Calcule l'aire de la surface totale de ce tétraèdre.

2°) On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [SA] et [BC].

-a) Montre que la droite (IJ) est perpendiculaire à (Bc) et à (SA).

-b) Calcule IB, IC et IJ en fonction de a.

3-a) Montre que le triangle SJA est rectangle.

-b) Déduis – en que le triangle AJH est rectangle en J.

4-a) Détermine le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre SABC.

-b) Détermine le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre SHJA.

-c) Evalue le rapport des volumes de ces deux sphères.

Problème 5

Dans un plan (P), le point I est le milieu d'un segment [AB]. J est un point de la droite perpendiculaire en I au plan (P). C et D sont deux de la droite perpendiculaire en J au plan (ABJ) tels que $JC = JD$.

1°) Montre que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (CID).

2°) Démontre que les plans (ABC) et (ABD) sont perpendiculaires au plan (CID).

3°) Démontre que les plans (ACD) et (BCD) son perpendiculaires au plan (ABJ).

4°) On projette orthogonalement les points A, B, C et D sur un plan (P') parallèle au plan(P). les projetés sont notés respectivement A', B', C' et D'. Détermine la nature du quadrilatère A'B'C'D'.

5-a) Montre que $CA = CB = DA = DB$

-b) La distance AB étant fixée. Détermine la valeur de IJ et celle de JC pour que le tétraèdre ABCD soit un tétraèdre régulier (c'est – à – dire un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 6

ABCD est un carré de centre O et de côté a où a est un nombre réel strictement positif. [Aα) $[B\beta)$, $[C\gamma)$ et $[D\delta)$ sont des demi – droites perpendiculaires au plan (ABC) respectivement en A, B, C et D et situées d'un même côté du plan. Sur la demi – droite [Aα) on choisit le point A' tel que $OA' = a$ et sur $[C\gamma)$ le point C' tel que $A'C' = 2a$.

1-a) Calcule CC' en fonction de a

-b) Détermine la nature du triangle A'C'O

-c) Démontre que la droite (A'C') est perpendiculaire au plan (DA'B).

2°) B' est un point de $[B\beta)$ est D' est un point de $[D\delta)$ et on pose : $BB' = x \; et \; DD' = y$ où $x \; et \; y$ sont des nombres réels strictement positifs.

-a) Détermine une condition portant sur les nombres réels x , $y \; et \; a$ pour que les points A', B' , C' et D' soient coplanaires.

-b) Montre dans ce cas que A'B'C'D' est un parallélogramme.

3°) détermine la valeur de x pour laquelle

-a) Le plan (A'B'C') passe par le point D.

-b) Le parallélogramme A'B'C'D' est un losange.

-c) Le parallélogramme A'B'C'D' est un rectangle.

Problème 7

ABCD est un tétraèdre tels que BCD soit un triangle équilatéral et $BC = BD = CD = AB = 4cm$.

La droite (AB) est orthogonale au plan (BCD). M est un point variable du segment [BC]. On pose : $BM = x \; (en \; centimètre)$. Le plan passant par M et Parallèle aux droites (AB) et (CD) coupe (BD) en N, (AD) en P et (AC) en Q. On se place dans le cas où M est distinct des points B et C.

1°) Démontre que le quadrilatère MNPQ est un parallélogramme.

2°) Démontre que les droites (QM) et (MN) sont perpendiculaires.

3-a) Exprime MN en fonction de x.

-b) Exprime MQ en fonction de x.

-c) Exprime l'aire de la surface du domaine délimité par le parallélogramme MNPQ en fonction de x.

4°) On considère la fonction numérique de variable réelle définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ par :

$$f(x) = 4x - x^2$$

-a) Démontre qu'il existe un nombre réel $\alpha \; tels \; que \; pour \; tout \; x \; de \; [0;4], f(x) \leq \alpha$

-b) Déduis – en la position du point M sur le segment [BC] pour que l'aire du parallélogramme MNPQ soit maximale.

-c) Calcule cette aire dans cette condition.

Problème 8

($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, de rayon r et de diamètre [AB] inclus dans le plan (P).

- ✓ $[Ax) \; et \; [By)$ sont deux demi – tangentes au cercle **($\mathscr{C}$).**
- ✓ C est un point de $[Ax)$ et D un point de $[By)$ tels que (CD) soit tangente en un point M au cercle **($\mathscr{C}$).**

1°) Fais une figure que tu complèteras au fur et à mesure de l'évolution du problème.

2-a) Démontre que les triangles CAM et DBM sont isocèles.

-b) Démontre que le triangle COD est rectangle.

-c) Démontre que $AC \times BD = r^2$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3°) On suppose que $CD = \frac{5r}{2}$

-a) Exprime en fonction de r les longueurs $AC, BD, AM \text{ et } BM$.

-b) Exprime en fonction de r l'aire de la surface du domaine délimité par le trapèze ACDB.

4°) On désigne par (Δ) la perpendiculaire en O au plan (P) et S le point de (Δ) distinct de O.

-a) Démontre que la droite (CD) et le plan (SOM) sont orthogonaux.

-b) Démontre que les plans SOC) et (SOD) sont perpendiculaires.

5-a) Démontre que le plan (SAB) est perpendiculaire aux plans (SAC) et (SBD).

-b) Construis l'intersection des plans (SAC) et (SBD).

-c) Construis la droite perpendiculaire aux droites (Ax) et (SB).

6°) On suppose que $SO = r\sqrt{3} \text{ et } AC = 2r$.

-a) Exprime en fonction de r la distance du point O au plan (SCD).

-b) Exprime en fonction de r l'aire de la surface totale et le volume de la pyramide SACDB.

Problème 9

Dans un plan, on considère le cercle **($\mathscr{C}$)**de centre O et de rayon r. Soit [AB] un diamètre de **($\mathscr{C}$)** et M un point de **($\mathscr{C}$)**distinct de A et B. On désigne par (Δ) la perpendiculaire en B au plan (P) et S le point de (Δ).

1°) Fais une figure que tu complèteras au fur et à mesure de l'évolution du problème.

2-a) Démontre que SMA est un triangle rectangle.

-b) Démontre que le plan (SMA) et le plan défini par la droite (Δ) et le point M sont perpendiculaires.

3°) Soit C le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB).

-a) Démontre que les droites (MC) et (AS) sont orthogonales.

-b) Démontre que le plan (SMC) et le plan défini par la droite (Δ) et le point A sont perpendiculaires.

4°) Soit D le projeté orthogonal du point B sur la droite (SM).

-a) Détermine la position du point D dans le cas où S et B sont confondus.

-b) Trouve l'ensemble des points décrit par D lorsque S décrit la droite (Δ) puis construis cet ensemble.

5°) On suppose que (BM) est un côté d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle **($\mathscr{C}$)**et que $SB = BM$

-a) Exprime en fonction de r le volume du tétraèdre SABM.

-b) D étant le projeté orthogonal du point B sur la droite (SM). Exprime en fonction de r le volume du tétraèdre ABSD et la distance du point S au plan (ABD).

Problème 10

On considère un tétraèdre ABCD. Soit M un point de]BC[. Par M, on mène le plan (P) parallèle à (AB) et (CD). Le plan (P) est sécant aux droites (BD), (AD) et (AC) respectivement en N, P et Q.

Partie A : On suppose que le tétraèdre ABCD possède les propriétés suivantes : $\begin{cases} AB = BC = CD = a \\ (AB) \perp (CD) \end{cases}$

1°) Démontre que MNPQ est un rectangle.

2°) On pose $BM = x$

-a) Exprime l'aire S du rectangle MNPQ en fonction de $a \text{ et } x$.

-b) On considère la fonction f définie par :

$$f :]0 ; a[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto S$$

Détermine la position du point M du segment]BC[pour que S soit égale à $\frac{3a^2}{8}$

Partie B : On suppose que le tétraèdre ABCD est régulier.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Soit a la mesure du côté. On désigne par K et L les milieux respectifs des côtés [AB] et [CD].
3-a) Démontre que la droite (AB) est orthogonale au plan (CKD).
-b) Déduis – en que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4°) Démontre que la droite (KL) est orthogonale au plan (MNP).
5°) On pose : $BM = x$
-a) Exprime en fonction de a et x le volume V de la pyramide KMNPQ
-b) On considère la fonction g définie par :

$$g :]0 ; a[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto V$$

Détermine la position du point M sur le segment]BC[pour que le volume V soit égal à $\frac{a^3\sqrt{2}}{48}$

Problème 11

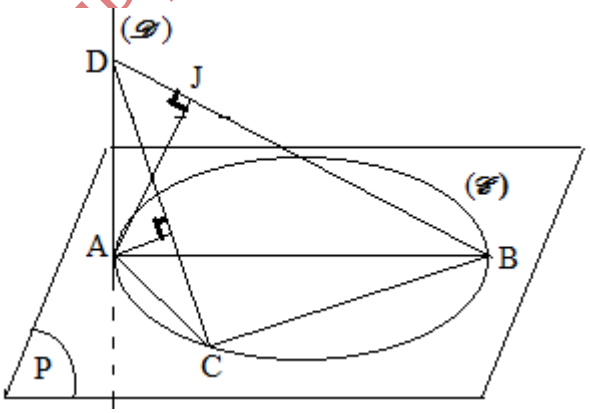
SABC est un tétraèdre tel que :

- ✓ ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle **($\mathscr{C}$)** de centre O et de rayon r et (P) désigne le plan contenant ce cercle.
- ✓ La droite (SO) est orthogonale au plan (P).
- ✓ $SO = r$

Soit A', B' et C' les points tels que :
$A' \in [AS]\ et\ SA' = \frac{2}{3}SA$; $B' \in [BS]\ et\ SB' = \frac{1}{2}SB$; $C' \in [CS]\ et\ SC' = \frac{1}{2}SC$
1°) Construis la droite d'intersection du plan (A'B'C') avec le plan (P).
2°) Dans le plan (P), on trace la droite (Δ) passant par O et parallèle à la droite (AB).
Démontre que le plan défini par (Δ) et le point C est le plan médiateur du segment [SC].
3-a) Démontre que les plans (SAH) et (SBC) sont perpendiculaires.
-b) Démontre que la droite (A'E) est orthogonale au plan (SBC).
4°) Exprime en fonction de r :
-a) la distance du point A' au plan (SB'C').
-b) le volume du tétraèdre SA'B'C'
-c) le volume du solide ABCA'B'C'

Problème 12

Soit (P) un plan , A et B deux points distincts de (P) , **($\mathscr{C}$)** le cercle de diamètre $[AB]$ inclus dans (P) , C un point de **($\mathscr{C}$)** distinct de A et B , **($\mathscr{D}$)** la droite orthogonale à (P) en A , D un point de **($\mathscr{D}$)** distinct de A.



1°) Démontre que les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que les plans (DAC) et (DBC) sont perpendiculaires.

ÉDITION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3-a) Dans le plan (ADC), soit I le projeté orthogonal de A sur la droite (DC).Démontre que la droite (AI) est orthogonal au plan (BCD).

-b) Dans le plan (ADB), soit J le projeté orthogonal de A sur la droite (DB). Démontre que le triangle AIJ est rectangle.

-c) Démontre que les points B , C , I et J sont cocycliques.

Problème 13

Soit SABC un tétraèdre tel que les triangles SAB, SAC et SBC sont rectangles en S, H le projeté orthogonal du point S sur le plan (ABC).

1°) Démontre que H est orthocentre du triangle ABC.

2°) Démontre que les angles du triangle ABC sont aigus (On pourra utiliser le théorème D'AL Kashi).

3°) Dans le triangle ABC, A', B' et C' désignent respectivement les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. Quelles est la nature des triangles ASA', BSB' et SCS' ?

4°) Démontre que : $aire\ (BHC) = \frac{SH}{SA} \times aire(BSC)$.

5°) Ecris des égalités analogues relatives aux aires des triangles AHB et ASB d'une part, AHC et ASC d'autre part.

6°) Démontre que : $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}$.

(On pourra exprimer le volume du tétraèdre de deux façons différentes)

Problème 14

Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par $A'\ B'\ , C', D'$ les projetés orthogonaux respectifs des points A ,B ,C et D sur les plans (BCD), (ACD), (ABD), (ABC).On suppose que A' estl'orthocentre du triangle BCD.

1-a) Démontre que le plan (ABA') est orthogonal à la droite (DC).

-b) Déduis – en les droites (AB) et (DC) sont orthogonales.

2-a) Démontre que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales

-b) Démontre que les droites (AD) et (BC) sont orthogonales.

3°) Démontre que B', C', D' sont des orthocentres respectifs des triangles ACD, ABD, ABC.

4°) Démontre que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en un point H. H est appelé orthocentre du tétraèdre. Seuls les tétraèdres orthocentriques ont un orthocentre.

Problème 15

Soit (P) un plan, O un point n'appartenant pas à (P), H le projeté orthogonale de O sur (P) et A un point de (P) distinct de H. Soit (D_1) et (D_2) deux droites distincts de (P) passant par A et ne passant pas par H. Les droites orthogonales en O au plan définies par O (D_1) d'une part, O et (D_2), d'autre part coupent respectivement le plan (P) en M_1 et M_2.

1°) Démontre que les points $M_1\ et\ M_2$ sont distincts.

2°)Démontre que la droite (OA) est orthogonale au plan(OM_1M_2).

3°) Démontre que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (M_1M_2).

4°) On désigne par A' le point d'intersection des droites (AH) et (M_1M_2).

-a) Détermine la nature du triangle AOA'

-b) Trouve une relation liant OH, AH, et A'H.

5°) La droite ($M_1\ H$) coupe (D_2) en B et la droite (M_2H) coupe (D $_1$) en C.

-a) Démontre que H est orthocentre du triangle ABC.

-b) Démontre que les droites (BC) et (M_1M_2) sont parallèles.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

6°) Sur quel ensemble se déplacent les points M_1 et M_2 lorsque les droites (D_1) et (D_2) varient dans (P)

Problème 16

SABC est un tétraèdre tel que la droite (SA) est orthogonale au plan (ABC). M est un point de l'arête [AB].
On pose : $SA = 4cm$; $AB = 3cm$; $BC = 4cm$ et $AC = 5cm$.
1°) Démontre que la base du tétraèdre est un triangle rectangle.
2°) Démontre que la face SAB est un triangle rectangle.
3°) Un plan (P) passant pr le point M et orthogonale à la droite (AB) coupe les arêtes [SB], [SC] et [AB] respectivement en I, J et K.
-a) Démontre que les droites (IM) et (JK) sont parallèles.
-b) Démontre que les droites (KM) et (AB) sont orthogonales.
-c) Déduis – en que les droites (KM) et (IJ) sont parallèles.
-d) Construis les points I, J et K puis détermine la nature du quadrilatère IMKJ.
4°) On pose : $BM = x$
-a) Représente en vraie grandeur les triangles SAB et ABC.
-b) Calcule IM et MK en fonction de x
5-a) Calcule l'aire de la surface du domaine délimité par le rectangle IMKJ en fonction de x
-b) On désigne par f la fonction qui à x associe cette aire. A l'aide de la calculatrice, représente la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;3]$
-c) Déduis – en une valeur approchée du maximum de f.
-d) Calcule x pour que IMKJ soit un carré

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°3: VECTEURS DE L'ESPACE

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 1

On désigne par $R = (0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace et par $ABCDEFGH$ un cube. Les points A, E, F, H ont pour coordonnées respectives : $(1\ ;1;3)$; $(1\ ;1\ ;1)$; $(1;3;1)$; $(-1\ ;1\ ;1)$.
(On vérifiera que A, E, F, H sont bien les sommets d'un cube.)
1-a) Que sais – tu des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EH}$?
-b) Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis celle du point D.
2-a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EF}$.
-b) Déduis – en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EB}$ puis celle du point B.
3-a) Comparez les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EH}$.
-b) Déduis – en les coordonnées de $\overrightarrow{FG}$, puis celle du point G.
4°) En écrivant $\overrightarrow{EC}$ comme somme de trois vecteurs connus, Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EC}$, puis celle du point C.
5°) Déterminent les coordonnées du centre I du cube $ABCDEFGH$.

Problème 2

Les points A, B, C, D ont pour coordonnées respectives : $(2\ ;-1\ ;3)$, $(1\ ;4\ ;-2)$, $(5;2\ ;1\ )$, et $(0\ ;7;1)$.
1°) G est le point de l'espace vérifiant $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

-a) Démontre qu'il existe trois nombres réels p, q et r tels que $\overrightarrow{AG} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC} + r\overrightarrow{AD}$

-b) Détermine les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

-c) Déduis – en les coordonnées de du point G.

2°) Détermine les coordonnées du point G, centre du parallélogramme ABCD.

3-a) Calcule les coordonnées du milieu I de $[BC]$ et du milieu J de $[AD]$.

-b) Vérifie que le point G est le milieu du segment$[IJ]$.

4-a) Calcule les coordonnées du point G_1centre de gravité du triangle BCD

-b) Déduis – en les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{AG_1}$.

5-a) Montre que les points A, G, G_1 sont alignés.

-b) Calcule le nombre réels k tel que $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{kAG}$.

Problème 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

On considère les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(-1\,;3\,;3), C(-2\,;1\,;4)$.

1-a) Existe – t – il des points d'abscisse 3 alignés avec A et B ?

-b) Existe – t – il des points d'ordonnées 5 alignés avec A et B ?

-c) Détermine deux points coplanaires avec A, B et C.

d) Déterminer un point d'abscisse 0 et d'ordonnées 1 coplanaires avec A, B et C.

2- a) les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ définissent – ils une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

-b) les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}$ définissent – ils une base de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

–c) Donne dans cette base les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{CO}$.

3°) On considère les vecteurs $\vec{u}, \overrightarrow{u'}, \vec{v}, \overrightarrow{v'}$ de coordonnées respectives

$(1\,;2\,;-1)\,;\ (-2\,;-4\,;\ 2)\,;\ (3\,;1\,;\ 0)$ et $(1;-3;2)$.

-a) Montre que $\vec{u}, \overrightarrow{u'}$ sont colinéaires

-b) Montre que $\vec{u}, \vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

-c) Montre que $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \overrightarrow{v'}$ sont coplanéaires

Problème 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Soit A, B, C trois points de coordonnées respectives $(1\,;2,\,;-3), (3\,;1\,;-1)\ et\ (1\,;\ 2\,;3)$.

1°) Montre que ces trois points déterminent un plan P.

2°) Donne un système d'équations paramétrique de P.

3°) Soit D $(0\,;\ 1\,;\ 1)$ un point de l'espace.

-a) Donner un système d'équation paramétriques de la droite Δ passant par D et parallèle à (AB).

-b) Détermine les coordonnées de E tel que ABED soit un parallélogramme.

4°) Détermine les points d'intersection de P avec les axes du repère.

5°) Détermine l'intersection de P et de la droite (OD).

Problème 5

On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$et on désigne par I le milieu du segment $[B'C]$; l'espace est rapporté au repère $(A', \overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{A'A})$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

1°) Quelles sont les coordonnées des points A, B', C', C ?

2°) Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\left(\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C}\right)$ dans la base $\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'D'}, \overrightarrow{A'A}$?

3°) Précise pourquoi $\left(\overrightarrow{A'B'}\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C}\right)$ est une base de l'espace.

4°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{A'A}$ et $\overrightarrow{A'I}$ dans la base$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C}\right)$.

5°) Quelles sont les coordonnées des points A, D', D dans le repère $\left(A, \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'C}\right)$?

Problème 6

Soient A, B, C et D quatre points non coplanaires et E tel que BDCE soit un parallélogramme. On désigne par B', C', D' les milieux de $[AB], [AC]$ et $[AD]$. Soit I le milieu de $[BE]$.

1°) Montre que les droites (EB) et $(C'D')$ sont parallèles.

2°) Les droites (BC') et (ID') sont – elles sécantes ou non coplanaires ?

3°) Que peut – on dire des plans $(B'C'D')$ et (BCD) ?

4°) On trace par B' la droite parallèle à (ED). Détermine son intersection avec le plan (ACD).

5°) On considère le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$. Donne les coordonnées des différents points de la figure.

Problème 7

Soit ABCD un tétraèdre, E le milieu de $[CD]$ et F le milieu de $[AB]$.

1-a) Définir à l'aide d'égalité vectorielles les points G, H et I centre de gravité des triangles ABC, ABD et ABE.

-b) Montre que les points E, G, H et I appartiennent au plan FDC.

-c) Montre G, H et I sont alignés et que (GI) et (DC) sont parallèles.

-d) Calcule GH et GI en fonction de DC.

2-a) Donne les coordonner des points de la figure relativement au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

-b) Démontre analytiquement les résultats de la question 1.

Problème 8

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Les points A, B, I, J sont définies par leurs coordonnées : $A(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ B(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)\ ;\ I(0\ ;0\ ;\ 1);\ J(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$. On définit les points A', B', A'', B'' de la façon suivante : $\overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{JA''} = \overrightarrow{A'J}$; $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{BI}$; $\overrightarrow{JB''} = \overrightarrow{B'J}$.

1-a) Que représente le point I pour le segment $[AA']$?

-b) Calcule les coordonnées de A'.

2-a) Calcule les coordonnées de B', A', B'' puis celles des vecteurs $\overrightarrow{AA''}$ et $\overrightarrow{BB''}$.

-b) Quelle relation existe – t – ils entre $\overrightarrow{AA''}$ et $\overrightarrow{BB''}$?

3°) On désigne par M un point quelconque, de coordonnées (x, y, z). Soit M' et M'' les points tel que I est milieu de $[MM'']$ et J milieu de$[M'M'']$. Calcule les coordonnées (x', y', z') de M' et (x'', y'', z'') de M'' en fonction de x, y, z.

4-a). Calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MM''}$.

-b) Montre que ce vecteur s'exprime simplement en fonction du vecteur$\overrightarrow{JI}$.

5°) Soit C le point de coordonnées $(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$. Soit C' et C'' les points tels que I est milieu de $[CC']$ et J le milieu de $[C'C'']$. Utilise les résultats de la question précédente pour calculer directement les coordonnées du point C'' (sans connaitre celle de C').

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 9

On désigne par $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un repère orthonormal de l'espace et par ABCDEFGH un cube. Les points A, E, F, H ont pour coordonnées respectives : $(1\,;1\,;3)$; $(1\,;1\,;1)$; $(1\,;3\,;1)$; $(-1\,;1\,;1)$.
(On vérifiera que A, E, F, H sont bien les sommets d'un cube.)

1-a) Que sais – tu des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EH}$?

-b) Calcule les coordonnées des vecteur $\overrightarrow{AD}$, puis celles du point D.

2°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{EF}$. Déduis – en les coordonnées de $\overrightarrow{FG}$, puis celle du point B.

3-a) Compare les vecteurs $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EH}$.

-b) Déduis – en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FG}$, puis celle du point G.

4°) En écrivant $\overrightarrow{EC}$ comme somme de trois vecteurs connus, calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EC}$, puis celle du point C.

5°) Quelle sont les coordonnées du centre I du cube ABCDEFGH ?

Problème 10

Dans un cube ABCDEFGH on désigne par J le milieu de $[AB]$ et par I le point tel que $\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FI}$. Soit K l'intersection des segments $[BI]$ et $[FI]$.

1°) Montre que $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KF} = 3\overrightarrow{KI}$ et que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} = 2\overrightarrow{KJ}$.

2°) Démontre que $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BK} + 2\overrightarrow{FK} = \vec{O}$

3°) On considère le point L défini par : $\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{BL} + 4\overrightarrow{CL} + 2\overrightarrow{FL} = \vec{O}$

-a) Exprime le vecteur $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LF}$ en fonction de $\overrightarrow{LK}$.

-b) Définis la position du point L

4-a) Montre que les droites (JL) et (CF) sont sécantes en un point M.

-b) Précise la position du point M sur le segment $[CF]$.

Problème 11

On donne un cube ABCDEFGH. On désigne par I le milieu de $[AE]$, par J le milieu de $[CF]$.

1-a) Justifie que AEFC est un tétraèdre.

-b) Détermine la position du centre de gravité de ce tétraèdre.

2°) Que représente le point L pour le segment $[IJ]$?

3°) Soit K le milieu de $[AC]$. Démontre que la droite (KL) passe par le milieu de $[EF]$.

4°) Soit Ω le centre de gravité du triangle AEF. Démontre que L appartient à la droite (C Ω) puis précise la position de L sur le segment $[C\Omega]$?

5°) Soit Ω' le centre de gravité du triangle ACF. Démontre que les points B, Ω', H alignés.

6° Calcule le nombre réel α pour que le point H tel que $\overrightarrow{AH} + \alpha\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{FH} = \vec{O}$

Problème 12

Le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est orthonormal. On donne les points $A\ (-2\ ;\ 1\ ;\ 3), B\ (1\ ;\ 0\ ;\ 2), C\ (3\,;1\,;-4)$.

1°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$ dans la base $(\vec{\imath},\vec{J},\vec{K})$.

2°) Calcule les coordonnées des milieux I, J, K des segments $[AB], [AC], [BC]$.

3°) Calcule la norme de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

4°) Quelle est la distance du point A au milieu K de $[BC]$?
5°) Calcule également la distance de B à J, puis la distance de C à I.

Problème 13

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 8\ et\ BC = 5$,
L'unité étant le centimètre. Les E, F, G, H sont définies par : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{FB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CG} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DA}$.
1°) Placer sur une figure les points A, B, C, D, E, F, G, G.
2°) Justifie que ($A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$) est un repère
3°) Détermine les coordonnées du point B dans le repère ($A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$) ?
4°) Déterminele coordonnées du point G dans le repère ($A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$) ?
5-a) Détermine les coordonnées des points E, F, H dans le repère ($A, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}$),
-b) Démontre que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

Problème 14

ABCD est un carré et les triangles AEB et BCF sont équilatéraux.
1°) Justifie que ($A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$) est un repère.
2°) Exprime les vecteurs $\overrightarrow{AE}\ et\ \overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AD}$.
3°) Détermine les coordonnées des points D, E , F dans le repère ($A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$) ?
4°) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}\ et\ \overrightarrow{DF}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
5°) Calcule le nombre réel k tel que $\overrightarrow{DF} = k\overrightarrow{DE}$. Qu'en déduis – tu pour les points D, E, F ?

Problème 15

On considère un tétraèdre ABCD. On désigne par I, J , K, L, M, N les milieux des arêtes $[AB], [AC], [AD], [BC], [CD], [DB]$.
On se propose de déterminer le centre de gravité G de ce tétraèdre.
1°) Traduis par une égalité vectorielle le fait que G soit le centre de gravité du tétraèdre ABCD.
2°) Démontre que G est le milieu des segments $[IM], [JN]\ et\ [KL]$.
3°) Exprime le vecteur $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.
4°) On désigne par G_1 le centre de gravité du triangle BCD.
-a) Démontre que $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{O}$
-b) Déduis – en la position du point G sur le segment$[AG_1]$.
5°) On désigne par G_2 le centre de gravité du triangle ACD, par G_3 celui du triangle ABD, par G_4 celui du triangle ABC. Que pouvez-vous dire des quatre segments $[AG_1]$, $[BG_2], [CG_3][DG_4]$?
6°) Enonce une propriété relative aux segments joignant les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre et aux segments joignant l'un des sommets d'un tétraèdre au centre de gravité de la face opposée à ce sommet.

Problème 16

Les points A ,B, C,D ont pour coordonnées respectives $(2\ ;-1\ ;\ 3), (1\ ;\ 4\ ;\ -2), (5\ ;\ 2\ ;\ 1), (0\ ;\ 7\ ;\ 1)$
1°) Démontre que ABCD est un tétraèdre.
2°) Détermine les coordonnées du point G, centre de gravité du tétraèdre ABCD

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

3-a) Calcule les coordonnées du milieu I de $[BC]$ et du milieu J de $[AD]$.

-b) Vérifie que le point G est le milieu du segment$[IJ]$.

4-a) Calcule les coordonnées du points G_1,centre de gravité du triangle BCD.

-b) Déduis – en les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG_1}$.

5-a) Montre que les points A, G, $\vec{G}_1$ sont alignés.

-b) Détermine le nombre réel k tel que $\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{kAG}$.

Problème 17

On donne un tétraèdre ABCD.

On considère les points E, F et G définis par : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

1°) Démontre que G appartient au segment $[EF]$ puis précise sa position sur ce segment.

2°) Les points I et J sont définis par $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

-a) Montre que les points E, F, I, J sont coplanaires.

-b) Détermine l'intersection des segments $[EF]$ et $[IJ]$?

Problème 18

On donne un plan P passant par A et de vecteurs directeurs$\vec{u}$ et $\vec{u'}$, une droite D passant par B et de vecteur directeur $\vec{v}$ et un point C. On donne :

$A\ (1\ ;-3\ ;\ 4), B\ (-1\ ;\ -2\ ;1)\ ;\ \ C\ (-2\ ;\ -3\ ;\ 3)\ ;\vec{u}(1\ ;0\ ;\ -1)\ ;\ \ \vec{u'}(3\ ;2\ ;-4)\ ;\ \vec{v}(3\ ;-1\ ;2).$

Existe – t – il un bipoint $[MM']$ tel que M appartient à P, M' appartienne à D et que C soit le milieu de $[MM']$

Problème 19

ABCD est un tétraèdre.

1-a) Pour quelle valeur du nombre k existe –t-il un point M tel que :$\overrightarrow{MA} + k\ \overrightarrow{MC} = \vec{0}$?

-b) Où se trouve le point M lorsque $k = 0$? lorsque $k = 1$?

-c) Lorsque $k \neq -1$, exprime le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

2-a) Etudie la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}\ par\ f(k) = \frac{k}{k+1}$.

-b) Déduis – en que $f(k)$ prend toutes les valeurs réelles, excepté la valeur 1.

-c) Quel est l'ensemble décrit par le point M tel que $\overrightarrow{MA} + k\ \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ lorsque k décrit l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\}$?

3°) On suppose $k \neq -1$. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{MA} + k\ \overrightarrow{MC} = \vec{0}\ et\ \overrightarrow{NB} + k\ \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.

–a) Montre que les vecteurs $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{CD}$sont coplanaires.

-b) Que peux – tu dire alors de la droite (MN) ?

4°) O est milieu du segment $[MN]$. On propose de trouver l'ensemble $\mathscr{E}$ décrit par le point O lors que k décrit l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\}$. On désigne par I le milieu de $[AB]$.

-a) Ce point est-il une position particulière de O ?

-b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{IM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IA}\ et\ \overrightarrow{IC}$, puis le vecteur $\overrightarrow{IN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IB}\ et\ \overrightarrow{ID}$. Déduisez-en une expression du vecteur $\overrightarrow{IO}$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 20

ABCDEFGH est un cube, I et J sont les centres des faces (ABCD) et (BCGF). M est le centre de gravité du triangle BEG. Nous nous proposons de démontrer les deux résultats suivants :

$[\boldsymbol{R1}]$ **:** (IJ) est parallèle à (AF).

$[\boldsymbol{R2}]$ **:** Les points D, M, F sont alignés.

Partie A

1°) En travaillant la relation de Chasles, montre que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ puis conclus

2-a) Démontre que, $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = 3\overrightarrow{FM}$.

-b) Reconnais le vecteur $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$.

-c) Utilise le rectangle ADGF pour justifier l'égalité$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$.

-d) Déduis – enque les vecteurs $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FM}$ sont colinéaires puis conclus.

Partie B

On considère le repère $(E;\ \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{EA})$.

3-a) Détermine les coordonnées des points E, F, H, A, B, G, D et C ?

-b) Détermine les coordonnées des points I et J ?

4-a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}\ et\ \overrightarrow{AF}$.

-b) Déduis – enque ces vecteurs sont colinéaires et conclus

5-a) Calcule les coordonnées du point M.

-b) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{FD}\ et\ \overrightarrow{FM}$.

-c) Déduisez-en que les points D, M, F sont alignés.

Problème 21

On considère un cube ABCDEFGH d'arête a où $a \in \mathbb{R}_+^*$. M, N et P sont les points définis par : $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. I et J sont les milieux respectifs de $[AB]\ et\ [HG]$.

1°) Montre que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CI}\ et\ \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{JC}$.

2°) Montre que la section du cube par le plan (MNP) est un pentagone MNPQR dont les sommets Q et R sont les milieux respectifs de $[BC]\ et\ [CG]$.

3-a) Calcule en fonction de a les longueurs des côtés du pentagone MNPQR.

-b) Montre que $\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{QR}\ et\ PM = a\sqrt{2}$.

-c) Calcule les angles du pentagone.

Problème 22

ABCD A'B'C'D' est un parallélépipède rectangle.

1-a) Pourquoi les diagonales $[AC']\ et\ [A'C]$ sont-elles sécantes ?

-b) On note O leur point d'intersection. Expliquez pourquoi O est le milieu de chaque diagonale.

2°) On pose $\alpha = \widehat{AOC}$.On se propose de calculer $\cos\alpha$ en fonction des dimensions $a = AA', b = AD, c = CD$ du parallélépipède. Pour cela, on considère le repère orthonormal $(A\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que : $\overrightarrow{AA'} = a\vec{\imath}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{bj}, \overrightarrow{AB} = c\vec{k}$.

-a) Quelles sont, dans ce repère, les coordonnées des points A, A' C', O ?

-b) Montre que $\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-c) Montre que lorsque le parallélépipède ABCD A'B'C'D' est un cube, $\cos\alpha$, donc l'angle α, est indépendant des dimensions du cube. Quelles est alors la valeur de cet angle ?
-d) Démontre le résultat obtenu en b) sans utiliser de coordonnées.

Problème 23

ABCD est un tétraèdre, E et F sont les points tels que $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$; $I, J, K, L,\ M, N$ sont les milieux respectifs de $[AB], [BC], [CD], [DE], [EF], [FA]$. Le but de l'exercice est de démontrer que les points $I, J, K, L,\ M$ et $\ N$ sont coplanaires. Pour cela, on va démontrer que chacun des points L, M, N est dans le plan (IJK). (Les points I, J, K déterminent bien un plan car ils ne sont pas alignés).

1-a)Prouve que $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DC}$.
-b) Qu'en résulte – t – ilpour le quadrilatère FACD ?

2-a) Prouve que $\overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{JK}$.
-b) Déduis – en que L appartient au plan (IJK).

3-a) Prouve que $\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{JK} - \overrightarrow{IJ}$.
-b) Déduis – en que M appartient au plan (IJK).

4°) En exprimant le vecteur $\overrightarrow{IN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$, montre que N appartient au plan (IJK).

5°) Que peux – tu dire des points I, J, K, L, M et N ?.

Problème 24

ABCD est un tétraèdre I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs de$[AB], [CD], [AC], [BD], [AD], [BC]$.

1-a) Montre que INJM est un parallélogramme.
-b) Déduis – enque $[IJ]$ et $[MN]$ ont même milieu O.

2 -a) Justifie que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
-b) Dis ce que représente le point O pour le tétraèdre ABCD.
-c) Montre que O est aussi le milieu de $[KL]$.

3°) On note P le centre de gravité du triangle BCD. En utilisant l'égalité$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$, montre que $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AP}$. Le point est donc sur la droite (AP).

4°)Précise la position des points Q et R tels que $\overrightarrow{BO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CR}$.

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°4: PRODUIT SCALAIRE

Problème 1

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arêtes 1. On désigne par G le centre de gravité de ce tétraèdre et par A', B', C', D' les centres de gravités respectifs des triangles BCD, ACD, ABD, ABC.

1-a) Démontre qu'il existe une sphère (Σ) de centre G, passant par les points A, B, C et D.
-b) Détermine le nombre réel k pour que (Σ) soit l'ensemble des points M tels que :
$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$.(Σ) est appelé sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

2-a) Démontre qu'il existe une sphère (Σ') de centre G, passant par les points A', B', C' et D'.
-b) Détermine les intersections de (Σ')avec chacun des plans $(BCD), (ACD), (ABD)$ et (ABC).
-c) Détermine le nombre réel k' pour que (Σ') soit l'ensemble des points M tels que :

COLLECTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k'$.($\Sigma'$) est appelé sphère inscrite au tétraèdre ABCD.

Problème 2

Soit ABCD un tétraèdre et I, J, K, L, M les milieux respectifs des segments $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD]$. λ étant un nombre réel, on considère les points P et Q tels que : $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CQ} = \lambda\overrightarrow{CD}$.

1-a) Démontre que : $\overrightarrow{PQ} = (1-\lambda)\overrightarrow{AC} + \lambda\overrightarrow{BD}$.

-b) Déduis – en que (PQ) est parallèle à (IKL).

2°) On désigne par O le milieu de $[PQ]$.

-a) Démonte que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{JM}$.

-b) Etablis la relation : $\overrightarrow{JO} = \lambda\overrightarrow{JM}$ puis précise l'ensemble des points O quand λ décrit $\mathbb{R}$?

-c) Déduis – en que pour tout point O du segment $[JM]$, il existe un point P de $[AB]$ et un point Q de $[CD]$ tels que O soit le milieu de $[PQ]$.

Problème 3

Soit ABCD un tétraèdre régulier. On pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{\jmath}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{k}$.On désigne par I, J et K les points définies par : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\vec{\imath}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{k}$.

1°) Détermine, en fonction de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ un couple de vecteurs directeurs du plan (IJK).

2°) Démontre que la droite (CD) et le plan (IJK) sont sécants en un point E, que l'on déterminera en exprimant $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

3°) Soit F le point défini par : $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BD}$. Démontre que le point F appartient au plan (IJK).

4°) Soit G le point défini par $\overrightarrow{IG} = 2\overrightarrow{IJ}$. Démontre que G est le point d'intersection des droites (BC) et (EF).

Problème 4

Soit ABCD un tétraèdre tel que la droite (AB) est perpendiculaire au plan (BCD) et le triangle BCD n'est pas rectangle. On désigne par E et F les projetés orthogonaux respectifs de D sur les droites (BC) et (AC).

1-a) Démontrer que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DF} = 0$

-b) Déduis – en que la droite (AC) est orthogonale au plan (DEF).

2°) Soit I et J les orthocentres respectifs des triangles BCD et ACD.

-a) Démontre que : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{IJ} = 0$

-b) Déduis – en que la droite (IJ) est orthogonale au plan (ACD).

Problème 5

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête 1. On désigne par H le centre de gravité du triangle BCD et par G le point défini par : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$

1°) Démontre que G est le milieu de $[AH]$.

2°) On désigne par (Σ) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $3MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3$. Démontre que ($\Sigma$) est une sphère passant par A.

3°) Détermine l'intersection de (Σ) et du plan (BCD).

4°) On désigne par (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que : $MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = 1$. Démontrer que ($\Gamma$) est un plan qui coupe les arrêtes $[AB], [AC]$ et $[AD]$ en leurs milieux,

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

5°) Détermine l'intersection de (Σ) et de (Γ).

Problème 6

Soit SABC un tétraèdre dont la face ABC est un triangle équilatéral de coté 1 et dont les faces SAB et SAC sont des triangles rectangles et isocèles en A.

1°) Calcule une valeur approchée des angles du triangle SBC.

2°) Soit H le projeté orthogonale du point A sur le plan (SBC).

-a) Démontre qu'il existe un nombre réel λ tel que : $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AS} + \lambda\left(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right)$.

-b) Exprimeλ en fonction du produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}$.

-c) Calcule le produit scalaire $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BH}$. Le point H est – ilorthocentre du triangle SBC ?

3°) Démontre que H est le centre du cercle circonscrit au triangle SBC.

Problème 7

Soit ABCD un tétraèdre.

1-a) Détermine l'ensemble (Γ) des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}\right) = 0$.

-b) Détermine l'ensemble (Σ) des points M tels que : $\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}\right) = 0$.

2°) L'espace est muni d'un repère orthonormé. On donne : $A\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne de (Γ) et une équation cartésienne de (Σ).

Exercice 8

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$.

Soit les points $A(-4\,;\,6\,;\,-1)\,;\,B(1\,;\,2\,;\,2)\,;\,C(-1\,;\,4\,;\,3)\,;\,D(1\,;\,2\,;\,1)$.

1°) Montre que ABC est un triangle puis calcule l'aire de la surface délimitée par ce triangle.

2-a) Calcule la distance du point D au plan ABC.

-b) Déduis – en que ABCD est un tétraèdre puis calcule son volume.

3°) On désigne par P le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB).

-a) Détermine les coordonnées de P.

-b) Calcule la distance du point D à la droite (AB).

4-a) Détermine les coordonnées d'un point E de l'espace tels que ABEC soit un parallélogramme.

-b) Détermine l'aire de la surface délimitée par ce parallélogramme.

5-a) Détermine un vecteur unitaire $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$

-b) Détermine un vecteur unitaire $\vec{v}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

-c) Détermine un vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

-d) Vérifie que $\vec{w}$ est un vecteur unitaire.

-e) Démontre que $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$une base orthonormé.

6.) On désigne par I et J les points de l'espace tels que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

-a) Justifie que $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{O}$ et $\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{O}$

-b) Détermine l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \parallel \left(\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SEQUENCE D'APPRENTISSAGE N°5: GEOMETRIE ANALYTIQUE DE L'ESPACE

Problème1

On considère dans l'espace les point $A\ (\ 1\ ;\ 1\ ;-1)\ , B(1\ ;\ 2\ ;-1)\ C\ (0\ ;\ 1\ ;\ 1)\ et\ N\ (-1\ ;\ 0\ ;\ 1)$.

1-a) Démontre que les points A, B et C définissent un plan noté (P)

-b) Détermine une équation cartésienne (P)

2-a) Etudie la position du point N par rapport au plan (P)

-b) Calcule la distance du point N au plan (P)

3°) Détermine les coordonnées du point (D) pour DBCA soit un parallélogramme.

Problème 2

On considère dans les plans (P) et (Q) d'équation respective $2x + 3y\ + z = 0\ \ ;\ \ x - 6y - 2z + 5 = 0$ puis la droite (Δ) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$

1°) Détermine l'équation cartésienne du plan (R) passant par les point $A(1\ ;\ 0\ ;\ 2)$ et perpendiculaire du plan (P)

2-a) Etudie la position du point $B(-1\ ;\ 3\ ;\ 0)$ par rapport à la droite (Δ).

-b) Détermine l'équation cartésienne du plan (P)passant par le point B et contenant la droite (Δ)

3-a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont sécants.

-b) Détermine leur intersection (D)

4°) Détermine (Q) $\cap\ (\Delta)$

5°) Détermine l'équation cartésienne du plan médiateur (L) du segment $[AB]$

Problème 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les plans (P),(Q) et (R) d'équation respective $2x - 3y + z - 1 = 0\ , 3x - 4y + 2z - 1 = 0, x - y + z - 1 = 0$

1-a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont sécants

-b) Ecris une représentation paramétrique de la droite (Δ)definie par $(\Delta)=(P) \cap (Q)$

2-a) Démontre que (Δ)est structement parallèle au plan (R)

-b) Etudie la position du point $A(-1\ ;-1\ ;\ 0)$ par rapport à la droite (Δ)

3°) Détermine les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur le plan (R)

Problème 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère les droites(D_1), $(D_2)\ et\ (D_3)$ définies par : $(D_1):\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = -t + 4 \end{cases}, (t\in \mathbb{R})$; $(D_2)\begin{cases} x = 4\alpha + 1 \\ y = 6\alpha + 5 \\ z = -2\alpha + 3 \end{cases}, (\alpha\in\mathbb{R})$ $(D_3):\begin{cases} x = 3B \\ y = 12B \\ z = -3 + 4 \end{cases}, (B\in\mathbb{R})$

1-a) Justifie que les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (P1) contenant les droites (D1)et (D2)

2-a) Prouve que les droites (D1) et (D3) sont sécantes.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (P2) définies par les droites (D1) et (D3)

Problème 5

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Dans l'espaces muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère le plan (P) d'équation $2x-3y+4z-3=0$ et les point A$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$et B $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

1°) Trouve une équation cartésienne du plan

-a) (P_1) passant par A et parallèle à (P)

-b) (P_2) passant par les points A et B perpendiculaire à(P)

2) Détermine un système équation paramétrique des droites (D1) et (D2) intersection respectives

-a) des plans (P_2) et (P)

-b) des plans (P_1) et (P_2).

Problème 6

L'espace E est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ A tout réel m, on associe le plan (P_m) d'équation :$(m^2+m)\,x+(2m+3)y+(m^2-1)\,z-4m-1=0$

Démontre qu'il existe un unique point A appartenant à tous les plans (P_m)

Détermine m pour que :

(P_m) passent par l'origine du repère

(P_m) passent par le point de cordonnées $(1\,;0\,;1)$

(P_m) passent par le point de cordonnées $(1\,;1\,;0)$

(P_m) soient parallèles à une droite de vecteurs directeur $u\,\vec{u}\,(1\,;2\,;-1)$

(P_m) soient perpendiculaire au plan d'équation $x+y+3z-5=0$

Problème 7

L'espaces E est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ soit deux plan (P) et(Q) d'équations cartésienne respectives : $x-2y+z=0\;et\;-x+y+z=0$

1°) Démontre que les plans (P) et (Q) sont sécants

2°) Détermine les coordonnées du point M au plans (P) et (Q) et situé dans le plan d'équation $x=1$

3°) Détermine les coordonnées du point N commun au plan (P) et (Q) et situé dans le plan d'équation $y=0$

4°) Détermine une représentation paramétrique des plans (P) et (Q).

5°) Détermine représentation paramétrique de l'intersection (Δ) des plans (P) et (Q)

Problème 8

L'espaces E est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ on considère (P_m) et (Q_m) d'équation respectives $(m-1)\,x+2y-z+2=0\;et\;x+my+(m-1)\,z+1=0$ où m est un paramètre réel.

1°) Démontre quelle que soit la valeur de m ces deux plans sont sécants

2-a) Détermine les valeurs de m pour lesquelles ces deux plans sont perpendiculaires

-b) Détermine dans ce cas une représentation paramétrique de leurs droites d'intersection

3°) Dans cette question, on suppose que $m=2$ et on désigne par (P) le plan (P_2) et par (P') le plan (Q_2)

-a)Démontre que l'ensemble des points équidistants de ces deux plans est la réunion de deux plans perpendiculaire $(Q)\;et\;(Q')$

-b) Soit $A(0\,;1\,;-3)$ un point de l'espace. Calcule $d(A,(Q))\;et\;d\;(A,(Q'))$

-c) Déduis – en la distances du point A à la droite d'intersection des plans $(Q)\;et\;(Q')$

Problème 9

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$on considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :$x-2y\ \frac{3}{2}\ z\ +\frac{5}{2}=0\ ;\ x-2y\ +3z-2=0$

1°) Vérifie que les plans (P) et (Q) sont sécants

2°) Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q) détermine une représentation paramétrique de (D)

3°) Détermine une équation cartésienne du plan (R) passant par $A(1;-1\ ;\ 0)$ et perpendiculaires aux plan (Q) et (P)

4-a) Etudie la position du point A par rapport aux plan(Q)

-b) Calcule la distance du point A au plan (Q)

Problème 10

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques respectives : $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases},(\alpha\in\mathbb{R})$ et $\begin{cases} x=2-2t \\ y=1-t \\ z=-t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$

1°) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires.

2°) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant la droite (D_2) et parallèle à la droite (D_1).

3°) Soit le point $K(-1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ de l'espace. Calcule la distance du point K à la droite (D_2).

Problème 11

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, On considère les points $A(3\ ;\ -5\ ;1),B(0\ ;2\ ;4)\ et\ le\ vecteur\ \vec{u}(1\ ;2\ ;-1)$.

1°) Soit (D) la droite de repère $(A,\vec{u})$.

-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D).

-b) Détermine les coordonnées du point C de la droite (D) d'ordonnées nulle.

-c) Détermine les coordonnées du point N de la droite (D) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.

2°) Soit (P) le plan d'équation cartésienne $2x-3y+z-10=0$.

-a) Calcule la distance du point A au plan (P).

-b) Démontre que la droite (AB) et le plan (P) sont sécants en un point K dont tu détermineras les coordonnées.

3°) Soit (Q) le plan passant par les points A et B et perpendiculaires au plan (P). On désigne par (Δ) la droite d'intersection des plans (P) et (Q).

-a) Détermine une équation cartésienne de (Q).

-b) Donne une représentation paramétrique de (Δ).

4°) Soit les points $E(2\ ;\ -1\ ;\ -4)\ ,F(1\ ;\ 0\ ;\ -3)\ et\ G(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

-a) Démontre que les points E, F et G détermine un unique plan (R) dont un vecteur normal est $\vec{u}$.

-b) Déduis – en que les points A, E, F et G sont non coplanaires puis conclus.

Problème 12

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, On considère les points $A(0\ ;\ 1\ ;-2),B(-1\ ;0\ ;-1)\ ,C(0\ ;-5\ ;\ -5)\ ,D(2\ ;0\ ;-2)\ ,E(1\ ;\ -4\ ;\ -6)\ ,la\ droite\ (\Delta_1)$ dont un

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

système d'équation cartésienne est $\frac{-x+2}{2} = -y+1 = -z$ et la droite (Δ_2) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, (\alpha \in \mathbb{R})$

1-a) Démontre que les points A, B et C définissent un plan (P) et un seul.
-b) Détermine une équation cartésienne de (P).
-c) Calcule l'aire du triangle ABC.
2°) Démontre que le quadrilatère ABCE est un rectangle.
3-a) Donne un repère de chacune des droites (Δ_1) et (Δ_2).
-b) démontre que les droites (Δ_1) et (Δ_2) sont non coplanaires.
4°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point D et perpendiculaire au plan (P).
5°) On désigne par H le projeté orthogonal du point D sur le plan (P).
-a) Détermine les coordonnées de H.
-b) Calcule la distance du point D au plan (P) puis conclus.
-c) Calcule le volume du tétraèdre ABCD.

Problème 13

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, On considère les points $A(1\ ;\ 0\ ;0), B(0\ ;1\ ;1)\ , C(0\ ;-1\ ;\ -1)\ , D(-1\ ;1\ ;-1)$.

1-a) Calcule l'aire de la surface du domaine délimité par le triangle ABC.
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).
-c) Vérifie que le point D n'appartient pas au plan (ABC).
2-a) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
-b) Détermine les coordonnées du point d'intersection H de la droite (Δ) e du plan (ABC).
-c) Déduis – en la distance du point D au plan (ABC).
3°) Calcule le volume du tétraèdre ABCD.
4-a) Détermine une représentation paramétrique du plan médiateur noté (P) du segment [AB].
-b) Détermine un système d'équation cartésienne de la droite d'intersection (Δ') des plans (ABC) et (P).
-c) Déduis – en une représentation paramétrique de la droite (Δ').

Problème 14

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, On considère les points $A(5\ ;\ -5\ ;2), B(-1\ ;1\ ;0)\ , C(0\ ;1\ ;\ 2)\ , D(6\ ;6\ ;-1)$.

1°) Détermine la nature du triangle BCD puis calcule l'ire du domaine délimité par ce triangle.
2-a) Prouve que le vecteur $\vec{n}(-2\ ;3\ ;1)$est un vecteur normal du plan (BCD).
-b) Déduis – en une équation cartésienne du plan (BCD).
3°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point A et perpendiculaire au plan (BCD).
4°) Détermine les coordonnées du point H, intersection de la droite (D) et du plan (BCD).
5°) Déduis de la question 5 le volume du tétraèdre ABCD.

Problème 15

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On donne les points $A(-1\,;2\,;3), B(-1\,;2;\,-2)$ et $C(-3\,;0\,;4)$ et on désigne par I le point défini par : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

1-a) Détermine les coordonnées de I.

-b) Vérifie que $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{O}$

2°) Soit (D) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\parallel\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)$. Démontre que (D) est une droite dont tu donneras un repère.

3°) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=-1-2\alpha\\ y=2-2\alpha\\ z=-2+\alpha\end{cases},(\alpha\in\mathbb{R})$

-a) Démontre que (Δ) et (D) sont strictement parallèles.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (P) déterminé par ses deux droites.

4°) Soit (Q) le plan d'équation cartésienne $x+y=0$ et le point $K(1\,;2\,;0)$.

-a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.

-b) Calcule la distance du point K à chacun des plans (P) et (Q).

-c) Déduis – en la distance du point K à leur droite d'intersection

Problème 16

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\,\vec{k})$.On considère les points $A\,(1\,;\,2\,;-1)\;et\;B\,(2\,;1\,;1)$

1°) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).

2°) Soit (P_m) le plan d'équation $x+y+m-3=0$ où m est un paramètre réel.

-a) Prouve que la droite (AB) est parallèle au plan (P_m).

-b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est – elle incluse dans le plan (P_m) ?

-c) Démontre que le plan (P_m) est perpendiculaire au plan (Q).

3°) Soit B' le projeté orthogonale de B sur (P_m) et A' le projeté orthogonale de A sur (P_m). Détermine les valeurs de m pour que $ABB'A'$ soit un carré.

Problème 17

Dans l'espace ($\mathscr{E}$) orienté muni d'un repère orthonormée direct $(O\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\,\vec{k})$, On considère un cube ABCDEFGH tel que : $\overrightarrow{AB}=\vec{\imath}\,;\;\overrightarrow{AD}=\vec{\jmath};\;\overrightarrow{AE}=\vec{k}$ et $\overrightarrow{OA}=-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}-2\vec{k}$

1-a) Démontre que ABGH est un parallélogramme

-b) Déduis – en que $\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{HG}=\vec{O}$

2°) On désigne par K, le centre de gravité du triangle ABH ;

$(\sigma)=\left\{M\in E/\;(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MH}).(-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MH})=0\right\}$

$(\Delta)\Rightarrow\left\{M\in E/\;(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MH})\parallel(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MH})\right\}$

-a)Démontre que (Δ) est une droite dont tu préciseras un repère.

-b) Démontre que (σ) est un plan dont tu préciseras un vecteur normal.

3-a) Détermine dans le repère $(O\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\,\vec{k})$ les coordonnées des points A,B,H, G et K.

-b) Détermine une équation cartésienne de (σ) et une représentation paramétrique de (Δ).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

4°) On considère les droites (D_1) et (D_2) définies par : (D_1)
$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 (t \in IR) \\ z = t - 1 \end{cases}$ et $(D_2): \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = -z$
Puis le plan (Q_1) d'équation cartésienne $(Q_1): x + y + z + 1 = 0$
-a) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.
-b) Donne une équation cartésienne du plan (Q_2) contenant (D_1) et (D_2).
-c) Démontre $(Q_1) \perp (Q_2)$
5-a) Détermine l'équation cartésienne du plan (Q_3) contenant les points O et A et orthogonale à (Q_1)
-b) Détermine un repère de $(Q_1) \cap (Q_3)$.
6°) On désigne par L le projeté orthogonale de O sur (Q_1)
-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (OL).
-b) Détermine les coordonnées du point L.
7-a) Démontre que AOBG est un tétraèdre.
-b) Détermine le volume de OABG.

Problème 18

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\ \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$ d'unité 2 cm. On considère les points $A(1; -1; 1), B(2; -2; -3),\ C(-2;\ 0; 3)$ et les plans :$(P): 2x + 3y - z - 4 = 0\ et\ (P'): 3x - 2y + 5z - 6 = 0$
1-a) Justifie que les plans $(P)\ et\ (P')$ sont sécants.
-b) Détermine une représentation paramétrique de la **(𝒟)** intersection de $(P)\ et\ (P')$
-c) Détermine une équation cartésienne du plan (Q)passant par A et orthogonale de $(P)\ et\ (P')$
-d) Calcule la distance de A à **(𝒟)**
2-a) Détermine les coordonnées du pont I intersection de la droite (AB) et du plan (P) puis du point J intersection de (AB) et (P')
-b) Calcule le volume du tétraèdre OIJC.
3-a) Justifie que les points A, B et C définissent un plan (R) dont tu donneras une équation cartésienne.
-b) Calcule l'aire du triangle ABC.
4°) Détermine $(P) \cap (Q) \cap (R)$

Problème 19

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On donne les points $A(1; -2; 1), B(0; 1; 2), C(1; 3; 4)\ et\ D(5; 1; 3)$. (D_1) et (P) sont respectivement l'ensembles des points $M(x; y, z)$ tel que (D_1) : $\begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ $et\ (P): \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CD} = 1.$
1°) Détermine la nature et un repère de (D_1).
2°) Détermine une équation cartésienne de (P) et précise sa nature
3-a) Démontre que les points A, B et C ne sont pas alignées et détermine une équation cartésienne du (ABC).
-b) Déduis – en que les points $A, B, C\ et\ D$ sont non coplanaires.
-c) Calcule le volume du tétraèdre ABCD.
-d) Détermine une représentation paramétrique de la hauteur (Δ) issue de D du tétraèdre.
4°) Détermine les coordonnées du point E pour que le quadruplet ABCE soit un parallélogramme.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

5°) Prouve que les droites (Δ) et (D_1) sont non coplanaires.
6°) Soit (D') la droite de système d'équations cartésiennes : $\frac{x-1}{2} = y = -z - 1$.
Détermine une équation cartésienne du plan (Q) parallèle à la droite (D'), orthogonale au plan (ABC) et contenant le point O.

Problème 20

L'espace $\mathscr{E}$est muni d'un repère orthonormé $(O\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\,\vec{k})$. On considère les plans (P_m) et (Q_m) d'équations respectives : $(m-1)x + 2y - z + 2 = 0\,; x + my + (m-1)z + 1 = 0$ où m est un paramètre réel.
1°) Démontre que quelle que soit la valeur de m, ces plans sont sécants.
2°) Détermine les valeurs de m pour lesquelles ces deux plans sont perpendiculaires. Détermine dans cas une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
3°) On suppose dans cette question que $m = 2$. On désigne par (P) le plan (P_2) et (P') le plan (Q_2) correspondant à $m = 2$.
-a) Démontre que l'ensemble des points équidistants de $(P)\ et\ (P')$ est la réunion de deux plans perpendiculaires$(Q)\ et\ (Q')$.
-b) Calcule la distance du point $A(0\,;1\,;\,-3)$ à chacun des plans $(Q)\ et\ (Q')$.
-c) Déduis – en la distance du point A à la droite d'intersection de $(Q)\ et\ (Q')$.

Problème 21

L'espace $\mathscr{E}$est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u}\,;\vec{v};\,\vec{w})$.
On considère les plans (P) et (P') d'équations cartésiennes respectives : $2x - y + 2z - 5 = 0\ et\ 2x + 2y - z - 4 = 0$
1°) Preouve que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.
2°) Calcule la distance du point $A(1\,;2;\,-1)$ à chacun des plans (P) et (P'). Déduis – en la distance du point A à la droite (D), intersection de (P) et (P').
3-a) Détermine un système d'équations paramétriques de la droite (D).
-b) Détermine par ses coordonnées, le point M de la droite (D) pour lequel la distance AM est minimale.

Problème 22

Dans l'espace $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u}\,;\vec{v};\,\vec{w})$, on donne les points $A(1\,;\,-1\,;2)\ et\ B(-1\,;1\,;\,-2)$
1°) Donne une représentation paramétrique de la droite (AB).
2°) Soit (P) le plan passant par A et perpendiculaire à la droite (AB) et (Q) le plan dont une équation carésienne est : $x - y + 2z + 6 = 0$
-a) Détermine une équation cartésienne du plan (P).
-b) Vérifie que le point B appartient au plan (Q).
-c) Vérifie que les plans (P) et (Q) sont parallèles.
3°) On considère la sphère (S) tangente en B au plan (Q) et dont l'intersection avec le plan (P) est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$. On désigne par I le centre de la sphère (S) et par $(a;\ b;c)$ les coordonnées de I.
-a) Prouve que le point I appartient à la droite (AB).
-b) Déduis – en que $b = -a\ et\ c = 2a$
-c) Démontre que $IA^2 - IB^2 = 12$ et déduis – en que $a - b + 2c = 3$

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-d) Détermine alors les coordonnées du point I et écris une équation cartésienne de la sphère (S).

Problème 23

Dans l'espace $\mathscr{E}$est muni d'un repère orthonormé $(O\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\,\vec{k})$, On considère les points $A\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,;\frac{1}{\sqrt{6}}\,;\frac{2}{\sqrt{6}}\right), B\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{1}{\sqrt{3}}\,;\frac{2}{\sqrt{3}}\right), C(1\,;0\,;3)$ et $(\Gamma)=\{M\in E/\ (2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB})\parallel\ \overrightarrow{OC}\}$

1°) Soit G le point défini par : $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

-a) Détermine les coordonnées du point G.

-b) Démontre que $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{O}$

-c) Prouve alors que (Γ) est une droite dont tu détermineras une représentation paramétrique.

2-a) Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux et unitaires.

-b) Détermine le vecteur $\vec{u}$ pour que le triplet de vecteurs $(\overrightarrow{OA}\,,\ \overrightarrow{OB}\,,\vec{u})$ soit une base orthonormée.

-c) Détermine une équation cartésienne du plan (OAB).

Problème 24

Dans l'espace $\mathscr{E}$est muni d'un repère orthonormé $(O\,\vec{\imath}\,;\vec{\jmath};\,\vec{k})$, On considère les plans (P_1) et (P_2) d'équations respectives : $x-y+z-2=0\ et\ y+z+1=0$. On suppose que (P_3) est un plan dont un repère est $(R,\vec{u}_1,\ \vec{u}_2)$ où $R(0\,;\ \ 1\,;2)$, $\vec{u}_1(1\,;0\,;\,-1)\ et\ \ \vec{u}_2(1\,;1\,;1)$.

1-a) Démontre que les plans (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

-b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (D_1) intersection des plans (P_1) et (P_2).

2°) Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires avec (D_2) avec la droite de repère $(S;\ \vec{u})$ où $S(1\,;1\,;1)\ et\ \vec{u}(1\,;2;\,-3)$

3-a) Déduis – en une équation cartésienne du plan (Q) contenant la droite (D_2) et parallèle à (D_1).

-b) Détermine une représentation paramétrique de (Q).

4-a) Détermine un vecteur $\vec{v}_1$, unitaire et colinéaire à $\vec{u}_1$ et un vecteur $\vec{v}_2$, unitaire et colinéaire à $\vec{u}_2$

-b) Détermine un vecteur unitaire $\vec{v}_3$ orthogonal à $\vec{v}_1$ et à $\vec{v}_2$.

5°) Justifie que $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$ est une base orthonormée.

6-a) Détermine la distance du point S au plan (P_1) puis au plan (P_2).

-b) Déduis – en la distance du point S à la droite $((D_1)$.

Problème 25

(P) est le plan d'équation cartésienne : $x-2y-2z+3=0$. Soit A et B deux points distincts de l'espace.

1-a) On suppose que la droite (AB) et le plan (P) ne sont pas orthogonaux. Démontre qu'il existe un unique plan (II) passant par A, B et perpendiculaires à (P).

-b) On donne : A$\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}$. Détermine une équation cartésienne de (II).

2°) On suppose que la droite (AB) et le plan (P) sont orthogonaux.

-a) Démontre que tout plan (II) passant par A et B est perpendiculaire à (P).

-b) Soit A$\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$. Démontre que tout plan (II) a une équation cartésienne de la forme : $\lambda(2x+y-12)+\mu(2x+z-10)=0$, où $(\lambda,\mu)\ \in\mathbb{R}^2$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 26

(D) et (D ‘) sont les droites de repère respectifs $(A,\vec{u})$ et $(B,\vec{v}\,)$ avec : A$\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$.

1-a) Détermine une représentation paramétrique de $(D)\ et\ (D')$.

-b) Démontre que ces droites sont non coplanaires.

2-a) Démontre qu'il existe un unique point I de (D) et un unique point J de (D') tels que la droite (IJ) soit perpendiculaire aux droite $(D\ )\ et\ (D')$.

-b) Détermine les coordonnées de ces deux points.

3°) Soit M et N deux points respectifs de $(D\ )\ et\ (D')$. On pose : $\overrightarrow{IM} = \alpha\,\vec{u}\ \ et\ \overrightarrow{JN} = \beta\vec{v}$.

-a) Calculer MN^2 en fonction de $\alpha\ et\ \beta$.

-b) Déduis – en que la valeur minimale de la distance MN est obtenue lorsque M est en I et N en J. Il est appelé distance entre les droites $(D\ )\ et\ (D')$.

Problème 27

On considère les points A$\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et D$\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$.

1°) Vérifie que les arêtes opposées du tétraèdre ABCD sont orthogonales deux à deux.

2-a) Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\ et\ \overrightarrow{DC}$

-b) Déduis – en les coordonnées des vecteurs $\vec{n}_1, \vec{n}_2\ et\ \vec{n}_3$ normaux respectivement des plans (DBC), (DCA) et (DAB).

3°) Détermine une représentation paramétrique des hauteurs (AA'), $(BB')\ et\ (CC')$ du tétraèdre ABCD.

4-a) Démontre que les droites $(AA'), (BB')\ et\ (CC')$ passent par un point H appartenant à la droite de repère (O, $\vec{k}$).

-b) Déduis – en que les hauteurs de ce tétraèdre sont concourantes.

Problème 28

Soit ABCD un tétraèdre tel que : A$\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ et D$\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$.

1°) Soit I , J , K les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[AC], [AD]\ et$ $(P_1), (P_2), (P_3)$ les plans médiateurs respectifs de ces arrêtes.

-a) Calcule les coordonnées des points I , J, K puis des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$

-b) Détermine une équation cartésienne de (P_1), (P_2), (P_3).

-c) Démontre que ces plans ont un seul point commun Ω, dont on calculera les coordonnées

2°)Démontre que Ω est le centre d'une sphère qui passe par les sommets A,B, C et D du tétraèdre dont on calculera le rayon.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

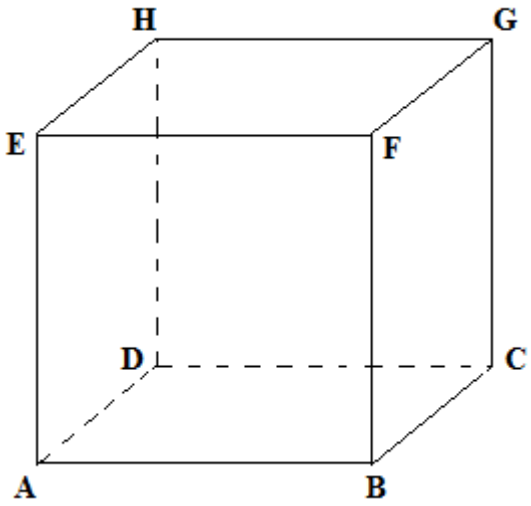
EVALUATIONS SOMMATIVES

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 1

Contexte : Un cadeau d'anniversaire

Le jour de son anniversaire Egnon, élève en première C reçoit de son papa, professeur de mathématiques, un cadeau dont l'emballage à la forme d'un cube ABCDEFGH d'arrête de longueur $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ avec$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.



A la vue de l'emballage, Egnon interroge son papa sur son contenu et ce dernier lui répond qu'a l'intérieur de l'emballage se trouve un objet qui présente son cadeau et qui a la forme d'un pentagone de sommets M, N, P, Q et R tels que $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}$; $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$; $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$; $\{Q\} = (PQ) \cap (BC) et \{R\} = (MR) \cap (GC)$. Sidéré par ces informations , Egnon décide de déterminer la position précise des points Q et R situés à l'intérieur de l'emballage avant même de l'ouvrir puis d'en comprendre les notions géométriques utilisées pour réaliser cet emballage.

Tache : Tu es invité (e) à aider Egnon dans sa quête en résoudre les trois problèmes ci-après.

Problème 1 :

1°) Dis si les propositions suivantes sont vraies ou fausses puis justifie ta réponse dans le cas où la proposition est fausse

-a) Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersections sont parallèles.

-b) Si une droite est perpendiculaire à un plan, alors elle est perpendiculaire à toute droite de ce plan.

2-a) Réalise une figure du cube ABCDEFGH en prenant $\alpha = 4\sqrt{2}cm$ puis place les points M, N et P ainsi que les points $O_1 et\ O_2$ milieux respectifs de $[AB]\ et\ [GH]$

-b) Justifie que $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{O_1 C}$

-c) On désigne par (Δ) la droite d'intersection des plans (MNP) et (ABC). Démontre que (Δ) est parallèle à (MN) et passe par le point P.

-d) Déduis – enque (Δ) passe par le milieu du segment $[BC]$ puis précise la position du point Q

3-a) En désignant par (Δ') la droite d'intersection des plans (MNP) et (HCG), démontre aussi que (Δ') est parallèle à (NP) et passe par le point M.

-b) Déduis – en que (Δ') passe par le milieu du segment $[CG]$ puis précise la position du point R.

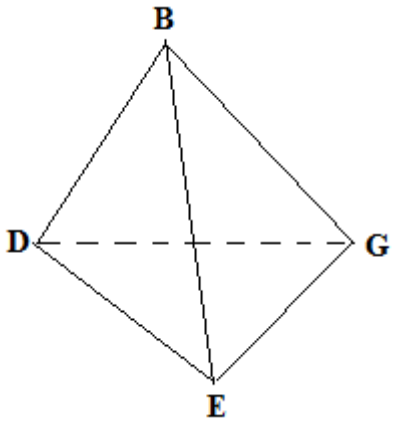
Problème 2 :

CONCEPTION DU PROFESSEUR TITE D. GOSSOU

Egnon considère le tétraèdre BDEG obtenu à partir du cube ABCDEFGH d'arête de longueur $\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ avec$\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

4-a) Justifie que le tétraèdre BDEG est un tétraèdre régulier de longueuravec$\alpha(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$ puis place sur ce tétraèdre les points I, J, K et L tels que :

- ✓ I et J sont les milieux respectifs de $[BG]\ et\ [EG]$
- ✓ K et L sont les centres de gravités respectifs des triangles BDE et DEG.



-b) Démontre que les droites (BG) et (KL) sont parallèles.

5°) Justifie que l'aire de la surface du domaine délimité par le quadrilatère BGLK est $\frac{2\sqrt{2}}{9}a^2$ en unité d'aire.

6-a) Démontre que le point K est le projeté orthogonal de G sur le plan (BDE) ?

-b) Que représente le point L pour le point B sur le plan (DEG) ?

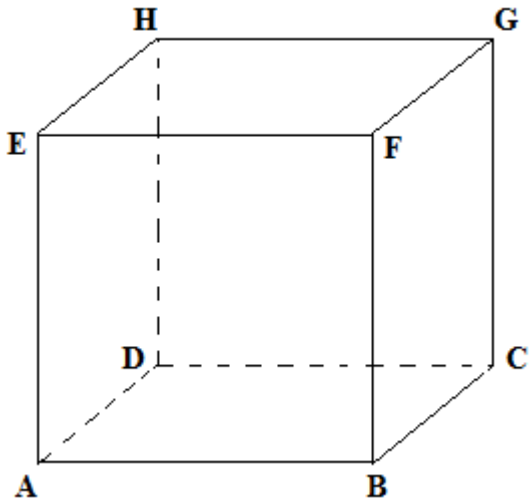
7-a) Démontre que pour tout point X du plan (IKL), on a : $XD = XE$

-b) Déduis – enque les droites (KJ) et (IL) sont non coplanaires.

-c) Calcule la distance du point J à la droite (DE).

Problème 3 :

Egnon considère à nouveau le cube ABCDEFGH ainsi que les points Q et M tels que Q est le milieu du segment $[BC]$ et $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}$ puis il pose : $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AE}\ et\ \vec{k} = \overrightarrow{AD}$.



CONCEPTION DU PROFESSEUR THEO. HILE D. GOSSOU

8-a) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont-ils coplanaires ?

-b) Démontre que les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires.

-c) On pose $\vec{u} = \vec{\imath}$; $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et $\vec{w} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$. Démontre que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

9-a) O et S sont deux points de l'emballage tels que $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Démontre que $(OS) \parallel (BD)$.

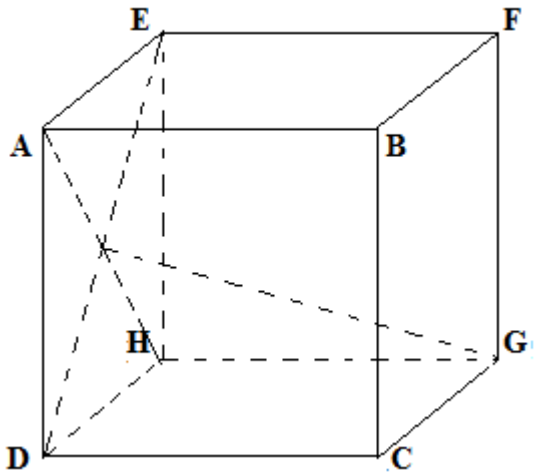
-b) Démontre que le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{2TC} + \overrightarrow{2TB} - \overrightarrow{TH} - \overrightarrow{3TG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{QM}$.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 2

Contexte : La cage de Dotou.

Pour élever sa petite tourterelle attrapé dans le champ de maïs de son père, Dotou a construit une cage ayant la forme d'un cube ABCDEFGH d'arrête de longueur a. La solidité de la cage est renforcée à l'intérieur par une tige d'extrémités I et G comme l'indique la figure ci- dessous et sur laquelle Dotou a placé la mangeoire de sa tourterelle au point A' projeté orthogonal de A sur (IG) où I est le point d'intersection des droites (AH) et (DE). Emerveillé par la beauté de cette cage, Steph, le grand frère de Dotou élève en 1ère C, s'est intéressé à la position de la mangeoire sur le segment $[IG]$ et décide d'en savoir davantage.



CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Tache : Tu es invité (e) à accompagner Steph dans ces différents quêtes à travers la résolution des trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1-a) Démontre que pour tout point M de la droite (GH), le triangle DAM est rectangle.

-b) Déduis – enla nature du quadrilatère ADGF.

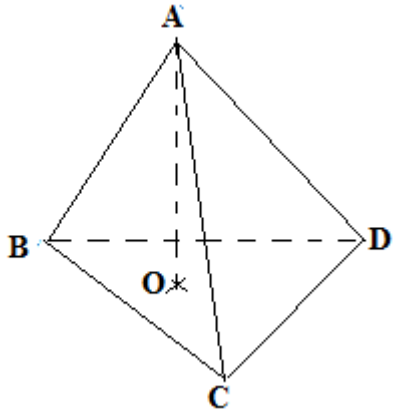
2°) Démontre que les plans (AGI) et (DEG) sont perpendiculaires puis précise leur intersection.
3-a) Démontre que A' est le projeté orthogonal du point A sur le plan (DEG).
-b) Démontre que dans le plan (AGI), les deux triangles $AA'I$ et GHI sont semblables.
-c) Exprime en fonction de a la distance du point A au plan (DEG).
-d) Justifie alors que $IA' = \frac{1}{3}IG$.

Problème 2 :

Afin de déterminer la position de certains points de la cage par leurs coordonnées, Steph munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
4°) Fais une figure du cube ABCDEFGH puis place le point O, milieu du segment $[AB]$ et les points P et Q tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.
5-a) Détermine les coordonnées des points O, P,Q et G puis celles des celles des vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{GQ}$
-b) Déduis – enque les points O, P , Q et G sont coplanaires.
6°) Détermine les coordonnées de X, point d'intersection du plan (OPQ) et de la droite (AB).

Problème 3 :

Inquiet quant à place de la mangeoire de la tourterelle, Steph décide de proposer à son jeune frère Dotou une autre cage de forme tétraédrique ABCD dans laquelle la mangeoire sera placé au point O projeté orthogonal de A sur la plan (BCD) comme l'indique la figure ci – dessous.



7°) Démontre que O est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD si $AB = AC = AD$.
8°) Démontre que O est le centre du cercle inscrit dans le triangle BCD si les distances respectives du point A aux droites (BC), (CD) et (DB) sont égales.
9°) Démontre que O est l'orthocentre du triangle BCD si les droites $(AB), (AC)$ et (AD) sont deux a deux perpendiculaires
10°) Que représenterait le point O pour le triangle BCD si $BC = CD = DB$?

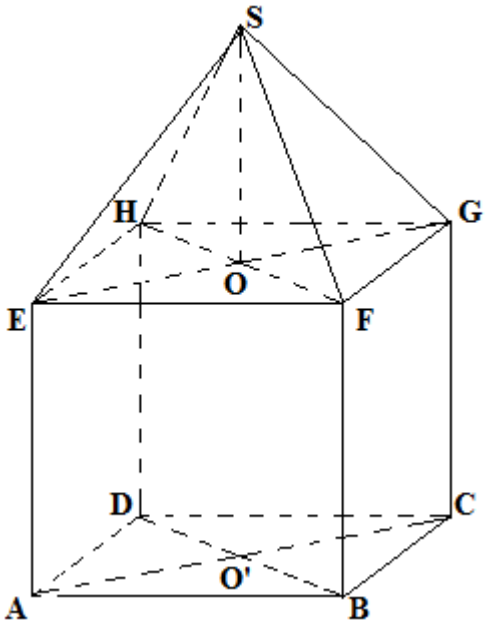
Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 3

Contexte :

CONCEPTION DU ... THEOPHILE D. COSSOU

Pour mieux conserve sa récolte, un agriculteur a sollicité l'aide d'un technicien pour la réalisation d'un grenier. Ce technicien lui a fait un plan dont une représentation est faite ci-dessous.



Informations

ABCDEFGH est un cube. SEFGH est une pyramide régulière de sommet S John est un enfant de cet agriculteur et est en 1ère scientifique. Quand il a vu cette représentation, il a voulu s'appliquer sur quelques notions acquises au cours de l'année.

Tache : Tu vas aider John dans son évaluation en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1 :

John a d'abord considéré p *et* p' les projections orthogonales respectives sur le plan (ACG) et sur la droite (EG).

1-a) Détermine les images par P des points A, B, C, D, E, F, G, H, S et O.

-b) Déduis – en les images par P de $[AD]$, $[AE]$, $[SE]$, $[SO]$

2-a) Détermine les images par P' des points B, C, E F, G, H, S et O'.

-b) Déduis – en les images par p' de (BDE) ; [HF], (DFB).

Problème 2 :

John veut aussi connaître les coordonnées de certains points de la figure relativement à un repère donné.

3-a) Justifie que le quadruplet (C, D, B, G) est un repère de l'espace.

-b) Détermine les coordonnées des points A, B, C, E, F, G, H, S et O dans le repère (C, D, B, G).

4°) On donne le point M tels que $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{GM}$ et les vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$avec $\vec{u} = \overrightarrow{EF} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}, \vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Détermine les coordonnées de M, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$

5-a) Le triplet $(\overrightarrow{EF}\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA})$ est –il une base de l'espace ? Justifie ta réponse

-b) Construis le vecteur $\overrightarrow{AT}$ tel que $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG}$

Problème 3 :

6-a) Précise la nature des triangles SEG et SHF.

-b) Justifie que O est le milieu des segments$[HF]$ *et* $[EG]$.

7°) Démontre que la droite (SD) est orthogonale au plan (EFG).

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

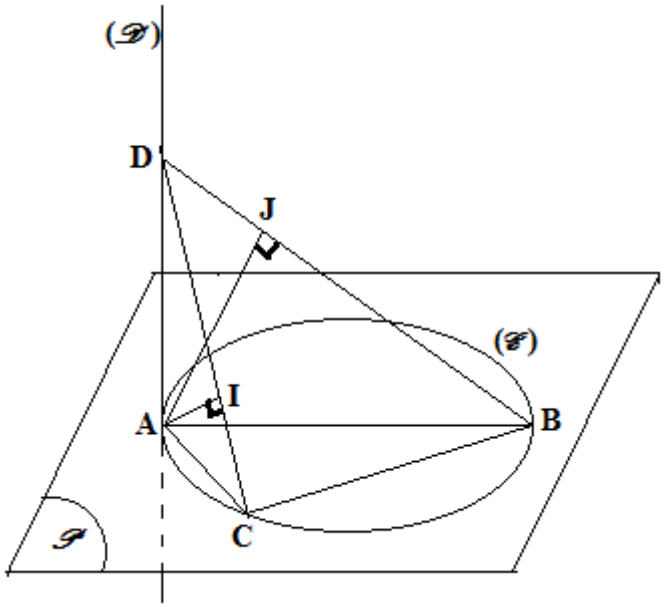
8°) Démontre que la droite (SO) est orthogonale à la droite (AD).
9°) Démontre que les plans (SEF) et (ADH) sont perpendiculaires.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 4

Contexte : Décoration artistique

M. Acapéo est un artiste décorateur. Il doit réaliser pour un client le motif dont le dessin est représenté ci – dessous.



Le client à indiquer que sur le motif : (P) est un plan, A et B deux points distincts de (P) ; **(𝒞)** le cercle de diamètre $[AB]$ inclus dans (P) , C un point de (C) distinct de A et B , (D) la droite orthogonale à (P) en A et D un point de (D) distinct de A. De passage dans l'atelier, Ashley, fille de M. Acapéo et élève en 1ère C, s'est intéressé aux différentes formes du motif à réaliser et décide d'en savoir davantage.

Tache : Tu es invité (e) à accompagner Ashley dans ses différents quêtes en résolvant les trois problèmes suivants :

Problèmes 1 :

1°) Démontre que les droites (BC) et (CD) sont perpendiculaires.
2°) Démontre que les plans (DAC) et (DBC) sont perpendiculaires.
3°) Dans le plan (ADC), I désigne le projeté orthogonal A sur (DC). Démontre que la droite (AI) est orthogonale au plan (BCD)
4°) Dans le plan (ADB) , J désigne le projeté orthogonal de A sur la droite (DB). Démontre que le triangle AIJ est rectangle.
5°) Démontre que les points B, C, I et J sont cocycliques

Problème 2 :

D'un motif à un autre Ashley découvre dans l'atelier un autre motif qui à la forme d'un tétraèdre ABCD tel que le point O est le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD) comme l'indique la figure ci – après:

CONCEPTION DU PROF ... É D. GOSSOU

5°) Démontre que O est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD si $AB = AC = AD$.
6°) Démontre que O est le centre du cercle inscrit dans le triangle BCD si les distances respectives du point A aux droites (BC) (CD) et (DB) sont égales.
7°) Démontre que O est orthocentre du triangle BCD si les droites (AB), (AC) et (AD) sont deux a deux perpendiculaires.

Problème 3 :
Pour réaliser les différentes parties d'un motif M. Acapéo utilise un dispositif ayant la forme d'un cube ABCDEFGH représenté par la figure ci – dessoussur le quelle il pose le tableau devant comporter le motif à réaliser. Le point I est le milieu du segment $[AC]$ et on désigne par O le projeté orthogonal du point A sur le plan (EBD).
8°) Démontre que O appartient à la perpendiculaire à la droite (DB) passant par E
9°) Calcule :
a) La distance du point F à la droite (AC)
b) La distance du point F à la droite (AG)
10°) Calcule :
a) La distance du point F au plan (EGC)
b) La distance du point F au plan (EBG)
11°) Calcule la distance des droites (BD) et (FC).

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 5

Contexte : Construction d'un grenier moderne.
Pour conserver sa récolte, le vieux TOGBE, grand cultivateur de la commune de Dogbo désire construire un grenier EFGHIJKL tel que : EF = EH = 1m et EI = 2m. Sa fille Bella en première scientifique lui propose le plan ci – dessousoù la toiture à la forme d'une pyramide régulière de hauteur 1m. Très émerveillé, son père lui confie alors la conduite des travaux de construction. Bella doit donc utiliser ses connaissances mathématiques pour réussir sa tâche. Le plan (ABC) permet de diviser le grenier en deux compartiments cubiques de même volume ; la partie supérieure doit recevoir des réserves de semences. Pour l'éclairage, des lampes sont fixés M, N, P et R milieux respectifs des segments [AB], [AD], [AI] et [BC]. Un appareil de sécurité est placé en un point $T(1\ ;\ 1;\ -2)$ dans le repère (A, M, N, P).
Tache : Tu vas aider Bella à réussir ce chef d'œuvre en résolvant les problèmes suivants :

Problème 1 :
1-a) Justifie que la droite (AE) est orthogonale aux droites (AB) et (AD).
-b) Déduis – enque (AE) ⊥ (IJL)puis (AE) ⊥ (MN).
-c) Démontre que le quadrilatère IEGK est un rectangle.
2-a) Démontre que $(AB) \perp (ED) et\ (ED) \perp (ABG)$.
-b) Déduis – enque les plans (DCF) et (ABG) sont perpendiculaires.
3-a) Démontre que $(BK) \perp (DCJ)\ et\ (BK) \perp (NPR)$
-b) Déduis – enla position relative des plans (DCJ) et (NPR).

Problème 2 :

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Afin de mieux positionner certains supports, elle utilise ses notion de projections et désigne par p et q les projections orthogonales respectives sur le plan (HEF) et sur la droite (AK).

4-a) Démontre que $(SO) \perp (HF)$ et $(SO) \perp (EG)$.

-b) Déduis – en que p (S) = O.

5-a) Détermine en te justifiant p(G) ; p(J) et p(M).

-b) Précise l'ensemble des points invariants par p.

6-a) Démontre que $(DI) \perp (ABK) et$ $(BI) \perp (ADK)$

-b) Déduis – enque$(AK) \perp (BDI)$.

-c) Justifie que les plans (MNP) et (BDI) sont parallèles.

-d) Enonce alors le programme de construction du point $P' = q\ (P)$.

Problème 3 :

Par ailleurs, elle doit identifier le point T et déterminer la position de certains points par leurs intersections.

7-a) Quand dit – onqu'un triplet de vecteur $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace ?

-b) Justifie que (A, M, N, P) est un repère de l'espace puis déduis – en une base de $\mathcal{W}$.

8-a) Détermine dans ce repère, les coordonnées de chacun des points A, B, C, E, G, K, S et O.

-b) Identifie la position de T sachant qu'il est un point de la figure.

9-a) Détermine les coordonnées de chacun des vecteurs $\overrightarrow{JS}$, $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{FO}$.

-b) Démontre que $\overrightarrow{JS} + 6\overrightarrow{PI} - \overrightarrow{FO} = \vec{0}$ et déduis-en que les vecteurs $\overrightarrow{JS}$, $\overrightarrow{PI}$ et $\overrightarrow{FO}$ sont coplanaires.

10-a) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{JL}$ dans la base $(\overrightarrow{JS}, \overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP})$.

-b) Calcule les produits scalaires : $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{JL}$.

-c) Déduis – enque la droite (IC) est orthogonale au plan (AJL).

-d) Que représente le vecteur $\overrightarrow{IC}$ pour le plan (AJL) ?

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 6

Contexte : Viabilisation d'un terrain.

Monsieur Codja a acheté un terrain à Abomey-Calavi. Après le lotissement de sa zone, il s'adresse à Monsieur Boni, un ingénieur architecte urbaniste. Pour viabiliser le terrain. M. Boni lui propose la construction d'un rez – de – chausséeayant la forme de la figure ci-dessous. ABCDEFGH et ABCD A'B'C'D' sont des cubes. $AB = a\ (\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$. Tècle, une fille de M. Codja se propose d'étudier quelques configurations du plan proposé à son père.

Tache : Tu vas te mettre à la place de Tècle et résoudre les trois problèmes suivants :

Problème 1 :

1-a) Justifie que $(GE) \perp (HF)$

-b) Démontre que $(GE) \perp (DH)$

-c) Déduis-en que $(DF) \perp (EG)$

2°) Démontre que les plans (AFG) et (BEH) sont perpendiculaires.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 2 :

Le compartiment $ABCD\ A'B'C'D'$ sera le grand salon dans lequel M. Boni a prévu l'installer au point H, le projeté orthogonal de B sur la droite (AC') une décoration l'lumineuse qui sera suspendu au plafond.Tècle se demande : quelle est la longueur du segment $[AH]$? Elle munit l'espace du repère orthonormé $(D'\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ tel que :

$\vec{\imath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{D'D}$; $\vec{\jmath} = \frac{1}{a}\overrightarrow{D'C'}$ et $\vec{k} = \frac{1}{a}\overrightarrow{D'A'}$.

3°) Détermine dans ce repère les coordonnées de tous les sommets du cube $ABCD\ A'B'C'D'$.

4-a) Justifie que $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC'} = 0$

-b) Ecris une relation entre x , y , z et a à partie de l'égalité $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC'} = 0$ où (x, y, z) est le triplet de coordonnées de H.

-c) Justifie que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\lambda AC'}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) puis détermine les coordonnées de H en fonction de a et λ.

-d) Déduis de tout ce qui précède la valeur de λ, puis les coordonnées de H.

5-a) Prouve que les vecteurs $\overrightarrow{A'H}$ et $\overrightarrow{AC'}$ sont orthogonaux.

-b) Déduis – enla projeté orthogonal de A' sur (AC).

Problème 3 :

Tècle muni l'espace a nouveau d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Lee quatre côtés de la clôture de ce terrain sont des plans dont l'un est le plan (P_1) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 + t - 3t' \\ y = 2t + 3t' \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ $(t; t') \in \mathbb{R}^2$ et un autre est le plan

(P_2) d'équation cartésienne : $2x + y + 2z - 4 = 0$.

6°) Détermine une équation cartésienne de (P_1).

7°) Démontre que $\begin{cases} 2x + 2y + 3z - 12 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$ est un système d'équation cartésienne d'une droite (D), puis détermine une représentation paramétrique de cette droite.

8°) Soit (Δ) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -5 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = -15 + 12t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

-a) Vérifie que les points $A_1(-2\ ; 1;\ -3)$ et $B(1;\ -3; 9)$ appartient à la droite (Δ).

-b) Déterminer les coordonnées des points M_1 et M_2 de la droite (Δ) tels que $AM_1 = AM_2 = 1$.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 7

Contexte :

A l'approche des fêtes de fin d'année, Ashley élève en classe de 1ère C, se propose d'utiliser ses connaissances en mathématiques pour élaborer un plan d'achalandage de la boutique vente de portables de son père afin d'attirer plus de clients. Dans l'élaborations du plan, Ashley représente la boutique par un cube ABCDEFGH dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$) et suggère que les portables de haute gamme soient disposée dans la partie de la boutique contenue dans le plan (P) d'équation cartésienne $x + y + z + 1 = 0$; les portables chinetoques soient disposées dans la partie de la boutique

contenue dans le plan (Q) passant par les points $I(1\ ;\ 2\ ;\ 3), J(2\ ;\ 1\ ;\ 2)$ et contenant la droite (Δ) de système d'équations cartésiennes $\frac{x-7}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-12}{6}$ et que les portables torcouvissor soient disposés dans la partie de la boutique contenue dans le plan (R) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + a + \beta \\ y = a + \beta \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + \beta \end{cases}$$

Hein !!! S'écria son père après avoir pris connaissances du plan, puis il désire en savoir davantage sur les intentions de sa fille Ashley.

Tache : Tu es invité (e) aider Ashley à apporter plus de précision à son père à travers la résolution des trois problèmes suivants

Problème 1 :

1°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ)

2-a) Vérifie que $I \in (\Delta)$

-b) Démontre que les droites (Δ) et (IJ) sont sécantes.

-c) Détermine une équation cartésienne de (Q).

3-a) Démontre que les plans (P) et (R) sont perpendiculaires

-b) On pose $(D) = (P) \cap (R)$. Détermine un repère de (D)

4°) Détermine si possible la partie de la boutique contenant à la fois les portables de haute gamme, chinetoques et torcouvissor.

Problème 2 :

Pour la décoration de la boutique, Ashley a prévu étoffer les parties de la boutique contenues dans les plans $(P_m) : (m-1)x + 2y - z + 2 = 0$ *et* $(Q_m) : x + my + (m-1)z + 1 = 0$ avec $m \in \mathbb{R}$ respectivement de guirlandes et de veilleuses

5-a) Démontre que $\forall m \in \mathbb{R}$, les plans (P_m) *et* (Q_m) sont sécants

-b) Pour quelle (s) valeur (s) de m les plans (P_m) et (Q_m) sont – ils perpendiculaires ?

6°) Démontre que l'ensemble des points M de l'espace équidistants de (P_2) *et* (Q_2) est la réunion de deux plans perpendiculaires (Γ) et (Γ')

7°) Calcule la distance $d\left(J, (\Gamma)\right)$ et la distance $d\left(J, (\Gamma')\right)$ puis déduis – en la distance du point J à la droite d'intersection (Γ) *et* (Γ')

Problème 3 :

En réalité dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le cube ABCDEFGH représentant la boutique est tel que les sommets A, E , F et H ont pour coordonnées respectives :

$(1\ ;\ 1\ ;\ 3)\ ;\ (1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ 3\ ;\ 1)$ *et* $(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$

8°) Détermine les coordonnées des autres sommets D, B, G et C du cube

9-a) Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{AG}$

-b) Déduis – enque la droite (AG) et le plan (BDE) sont perpendiculaire en un point S

10°) Démontre que S est le centre de gravité du triangle BDE.

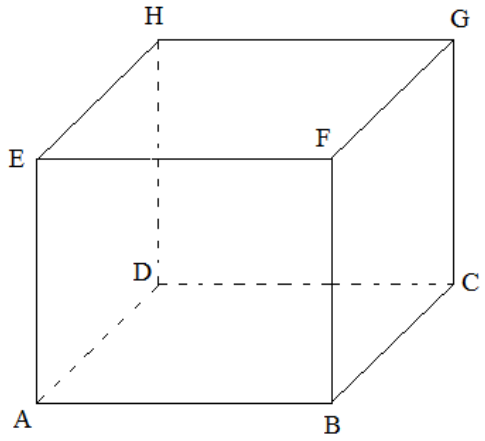
Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 8

Contexte : La refondation au Bénin.

Dans son programme de développement, le gouvernement béninois décide de construire une grande institution financière dans la région de Covè. Les travaux sont confiés à l'ingénieur Dramane qui en fait une maquette au chef d'œuvre comme représentée ci- dessous suivi de quelques informations utiles.



Cette institution a une forme cubique de 2,5 m d'arête.

A la vue de cette maquette, Toni fils aîné de l'ingénieur décide de s'appuyer sur les connaissances géométriques acquises en classe mais il rencontre certaines difficultés.

Tâche : Tu es invité(e) à trouver des solutions aux préoccupations de Toni en résolvant les problèmes suivant.

Problème 1

1-a) Démontre que la droite (CH) est orthogonale est orthogonale au plan (ADG).

-b) Démontre que les plans (CHE) et (ADG) sont perpendiculaires.

2°) Démontre que les plans (ACE) et (BDH) sont perpendiculaires.

Problème 2

La construction de la banque étant achevée, le Maire de la région de Covè décide de sécuriser les lieux en plaçant 3 agents de sécurités à des points stratégiques P, Q et R tels que $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ} = 4\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{RC} = 2\overrightarrow{CG}$. Une caméra de surveillance sera installée au milieu M du segment [AE].

L'espace occupée par l'ensemble est muni du repère orthonormal $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

3°) Détermine les coordonnées des points C, D, F et G dans ce repère.

4°) Détermine une équation paramétrique du plan (DFG).

5°) Vérifie le résultat de la question 1.

6-a) Démontre que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

-b) Démontre que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

7-a) Détermine la nature du triangle PQR puis calcule son aire.

-b) Calcule la distance du point M à la droite (BC).

8°) Démontre qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est : $4x + 2y + z - 8 = 0$.

Problème 3

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

A l'extérieur de la banque, l'espace PQRE est réservée au guichet automatique et le point K est le projeté orthogonal du point E sur le plan (PQR).
1-a) Justifie que E n'appartient pas au plan (PQR).
-b) Démontre que le guichet automatique a une forme tétraédrique.
2-a) Détermine une représentation paramétrique de la droite (EK).
-b) Déterminer les coordonnées de K.
3-a) Calcule la distance du point E au plan (PQR).
-b) Détermine le nombres de personnes que peut contenir ce guichet sachant qu'une personne occupe un espace de $56{,}25\ dm^3$.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 9

Contexte : Aménagement du territoire

Dans le projet d'aménagement de son territoire, un pays africain a prévu de construire un tour dans sa capitale économique et de fortifier la citadelle de la ville. Coffi, l'ingénieur invité à cet effet, a muni l'espace d'un repère orthonormé dans lequel deux points P et K ont pour triplet de coordonnées respectifs $(2\,;-1\,;3)$ et $(1\,;-3\,;\,-2)$.

En fait, la présidence de la république et la citadelle de la ville sont assimilés respectivement aux points P et K. La tour à la forme d'un tétraèdre BENI à la cime I duquel sera cachée une puissante caméra de surveillance. Pour des mesures de sécurité, certaines constructions de la ville seront détruites. L'ingénieur désigne par (Γ_1) l'ensemble de ces constructions et précise que (Γ_1) est l'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{PM}.\overrightarrow{PE} = 0$ puis donne les points B, E, N et G définis par :$B(1\,;\,-2\,;3)$, $E(1\,;\,0\,;1)$, $N(0\,;\,-3;\;3)$ et $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BE} - 4\overrightarrow{BN}$. La caméra pourra accéder parfaitement à tous les points M du plan vérifiant l'ensemble (Γ_2) : $\left\|\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{ME} - 4\overrightarrow{MN}\right\| = 10$.
Lors d'une de ces recherches sur l'internet, Falim un élève en classe de Tle D a découvert ces informations et décide d'en percer le secret.

Tâche : Tu vas aider Falim en résolvant les trois problèmes suivants. L'unité de longueur est le décamètre.

Problème 1

1-a) Détermine la nature de (Γ_1).
-b) Vérifie que les points B et N appartiennent à (Γ_1).
2-a) Démontre que $\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GE} - 4\overrightarrow{GN} = \vec{O}$
-b) Déduis – en la nature de (Γ_2)
3-a) Détermine les coordonnées du point G.
-b) Déduis – en que (Γ_2) est inclus dans (Γ_1).
4-a) Etudie la position du point K par rapport à l'ensemble (Γ_1).
-b) Déduis – en que la citadelle n'est pas dans la même zône plane que la présidence.
-c) Calcule alors la distance qui sépare la citadelle de la zone présidentielle.
-d) Donne une représentation paramétrique de la von rectiligne qui relie la présidence à la citadelle.

Problème 2

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

En réalité, le radar est situé à un point $R(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ par lequel passe une plaque électrique. Cette plaque est matérialisée par un plan (P_1) perpendiculaire à la droite (KG) et le sommet de la tour BENI est le point I(1 ; 3 ; 9).

5°) Détermine une équation cartésienne du plan (P_1).

6-b) Détermine l'intersection de (P_1) et de (Γ_1).

-b) Caractérise l'intersection de (P_1) et de (Γ_1).

7°) Détermine l'intersection de (P_1) et de (Γ_2).

8-a) Détermine la distance du point I au plan (BEN) puis déduis en la hauteur H de la tour en décamètre.

-b) Calcule en dm^2 l'aire de la surface du domaine délimité par le triangle BEN.

-c) Détermine en dm^3 le volume de la tour.

Problème 3

Soit ABCD un tétraèdre régulier d'arête de longueur a où a est un ombre réel strictement positif.

I, J, K et L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [AD], [AB] et [DC].

9-a) Calcule les longueurs ID et IA en fonction de a.

-b) Déduis – en la nature du tringle ADI.

10°) Démontre que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AD).

11°) Démontre que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (BC).

12°) Calcule la longueur IJ en fonction de a.

13°) Démontre que $IJ = Kl$

14-a) Démontre que les droites (IL) et (JK) sont parallèles.

-b) Démontre que $IL = Jk = JL$

-c) Déduis de la question a que les points I, J, K et L sont coplanaires.

-d) Déduis des questions précédentes la nature du quadrilatère IJKL

15°) Les droites (IJ) et (LK) se coupent en O. Calcule la longueur OA en fonction de a

16-a) démontre que O est équidistant des points A, B, C et D.

-b) Déduis – en le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Fin!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 10

Contexte :

Lors de la journée béninoise des arts et culture, l'un des objets d'art exposé par l'artiste ''Ben'' a la forme d'un cube ABCDEFGH. Un jeu de lumière est placé en un point I sur le segment [GH]. Le point J est l'intersection du plan (ACI) et de la droite (EH), le point K est milieu de [BC]. Le solide FACIJ est destiné à contenir de l'eau. Deux ouvertures O_1 et O_2 sont prévues respectivement sur les plans (IGC) et (AJG). Un visiteur français voulant acheter cet objet souhaite connaître le volume de l'eau que peut contenir le solide FACIJ et demande l'emplacement exact des points O_1 et O_2. L'espace est muni d'un repère orthonormé$\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on désigne par R le projeté orthogonal de I sur (AC) avec I $\left(\frac{1}{3};1;1\right)$. Ben a fait appel à son enfant Yvon en première C pour l'aider à répondre au visiteur.

Tâche : Tu es invité(e) à agir à la place de Yvon à trouver des solutions aux préoccupations de Ben en résolvant les trois problèmes suivant.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Problème 1

1-a) Précise les coordonnées de chacun des points C, F, E, H et G.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (ACI).

-c) Détermine un système d'équations cartésiennes de la droite (EH).

-d) Déduis en qu'on a J $\left(O; \frac{2}{3}; 1\right)$.

2-a) Justifie que (IJ) et (AC) sont parallèles.

-b) Calcule les distances IJ et AC.

-c) Quelle est la nature du quadrilatère ACIJ.

3-a) Justifie les affirmations suivantes :

- $\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AC}\ ;\ k \in \mathbb{R}$
- $\overrightarrow{IR}.\overrightarrow{AC} = 0$

-b) Déduis en alors le réel k où $R\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$.

4°) Calcule alors :

-a) L'aire de ACIJ

-b) La distance de F au plan (ACI).

-c) Le volume de l'eau que peut contenir le solide FACIJ.

Problème 2

Les points O_1et O_2 sont définis de la manière suivante :

- ✓ $\overrightarrow{O_1I} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{CI}\right)$
- ✓ O_2 est le milieu du segment [JG].

M désigne un point quelconque de l'espace.

5°) Détermine les coordonnées des points O_1 et O_2.

6-a) Démontre que $2\overrightarrow{O_1I} - \overrightarrow{O_1G} - \overrightarrow{O_1C} = \vec{O}$

-b) Déduis – en que$\vec{v} = 2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant et que $\|\vec{v}\| = \frac{5}{3}$.

7°) Détermine l'ensemble (Γ_1) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MC}\right\| = \|\vec{v}\|$.

8°) Détermine l'équation cartésienne de l'ensemble (Γ_2) des points M de l'espace tel que $\left\|\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$.

Problème 3

Pour assurer la sécurité de la salle d'explosion, un panneau solaire assimilable à un plan (Q) d'équation cartésienne $y + z = 0$.

9°) Démontre que $(Q) = (DCF)$

10°) On considère dans ce plan (P), les points P, Q et K tel que K soit le milieu de [PQ]. L est un point de la droite perpendiculaire en K au plan (Q). R et S sont deux points de la droite perpendiculaire en L au plan (PQL) tels que $RL = LS$.

9°) Montre que la droite (PQ) est perpendiculaire au plan (RKS).

10°) Démontre que les plans (PQR) et (PQS) sont perpendiculaires au plan (RKS).

11°) Démontre que les plans (PRS) et (QRS) sont perpendiculaires au plan (PQL).

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 11

Contexte Test

Achiri de poisson est un professeur au Lycée Paris Sud en France. Après des séries de travaux d'échange de connaissance avec ses apprenants, il décide de connaître le degré d'assimilation de ses apprenants en leurs proposant ce qui suit intitulé test.

Tâche : Tu es invité(e) à jouer le rôle de ses apprenants en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$).

1-a) Démontre que les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$; $B(-3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ et $C(2\ ;\ 6\ ;\ -1)$ déterminent un plan.

-b) Vérifie qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

2-a) Détermine un système d'équation paramétrique de la droite (D) passant par I (-5 ; 9 ; 4) et perpendiculaire à (ABC).

-b) Détermine les coordonnées de J, le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC).

-c) Déduis en les distances du point I au plan (ABC).

3-a) Détermine les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A\ ;\ 2)$; $(B\ ;\ -1)$; $(C\ ;\ 1)$.

-b) Prouve que $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG}$.

-c.) Déduis – en l'ensemble (Γ_3) des ponts M de l'espace tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}$

Problème 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$). Soit (P_1) et (P_2) les plans d'équations cartésiennes respectives $-2x + y + z - 6 = 0$ et $x - 2y + 4z - 9 = 0$.

4°) Montre que (P_1) et (P_2) sont perpendiculaires.

5°) Soit (Δ) la droite d'intersection de (P_1) et (P_2). Montre qu'une représentation paramétrique de (Δ) est :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}.$$

3°) Soit M un point de (Δ) de paramètre t et A de coordonnée $A(-9\ ;\ -4\ ;\ -1)$.

-a) Vérifie que A n'appartient ni à (P_1) ni à (P_2).

-b) Exprimer AM^2 en fonction de t.

6°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$.

-a) Vérifie que pour tout nombre réel t, $f(t) = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$

-b) Déduis – en le point M pour que la distance AM soit minimale, on désigne ce point par I.

7-a) Soit (Q) le plan orthogonal à (Δ) passsant par A. Détermine une équation cartésienne de (Q).

-b) Démontre que le point I est le projeté orthogonal de A sur (Δ).

Problème 3

Dans un cube ABCDEFGH d'arrête de longueur 1. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [GH]. Le point K est le centre de la face (BCGF). Les calculs seront effectués dans le repère orthonormal $\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$.

8-a) Justifie que les points B, H, G, D, F, J et I ont pour coordonnées dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE}\right) B(1\ ;\ 0\ ;\ 0).H(0\ ;\ 1\ ;\ 1)\ ;\ G(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ ;\ F(1\ ;\ 0\ ;\ 1)\ ;\ I\left(\frac{1}{2}\ ;0\ ;0\right)$ $;J\left(\frac{1}{2};1;1\right)\ ;\ D(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-b) Démontrer que le quadrilatère DIFG est un parallélogramme.

-c) Etablis que DIFG est un losange et montre que l'aire de ce losange est égale à $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 12

Contexte : Un jeu d'élèves.

Sur le dispositif schématisé du document, une cible est placée en un point S, sommet d'une pyramide régulière à base carrée. ABCDEFGH est un cube d'arrête 1(unité de longueur 1cm).
L'espace est rapporté au système de points (A ; B ; D ; E).
Un jeu consiste à tirer une balla d'une machine et essayer d'atteindre la cible. On a supposé que les trajectoires de toutes balles tirées sont des droites et dépendent de certains paramètres que le joueur fait entrer dans sa machine. Trois élèves de première C Emmanuel, Alice et Octave ont fait chacun un essai sans succès.
La trajectoire de la balle tirée par Emmanuel est la droite (D_1) de représentation paramétrique (S) (voir support). Celle de la balle tirée par Alice est la droite (D_2) de système d'équation cartésienne le système (S'). Enfin, Octave a tiré une balle dont la trajectoire est la droite (D_3) passant par K et L. (voir support).
Kokou, un autre élève en Terminale D, qui veut aussi faire un essai se demande comment s'y prendre pour atteindre S.

Support :

(S) : $\begin{cases} x = -2 + \alpha \\ y = 1 + 2\alpha \\ z = 4 - 2 \end{cases} (\alpha \in \mathbb{R})$; $(S'): 2x = y - 4 = \frac{z-2}{-1}$; $K(-4,1,1)$et $L(2,5,3)$.

- O est le centre du carré ABCD.
- O' est le centre du carré EFGH.

Tâche : Tu vas aider Kokou à atteindre la cible en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Montre que (A ; B ; D ; E) est un repère orthonormé de ($\mathscr{E}$) noté R

-b) Détermine les coordonnées A ; B ; C ; D ; E ; F ; G ; H ; O.

2°) Donne un repère de chacune des droites (D_1) ; (D_2) et (D_3).

3-a) Démontre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (P_1) contenant (D_1) et (D_2).

4-a) Démontre que (D_1) et (D_3) sont sécantes en un point I dont on précisera ses coordonnées.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) contenant ces droites.

-c) Déduis en une représentation paramétrique de (Q).

5°) Trouve une représentation paramétrique puis une équation cartésienne du plan ($\prod$) contenant (D_2)et perpendiculaire à (D_3).

6-a) Montre que $\forall\, M \in (\mathscr{E})$ on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ et $\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{GC}$

-b) En déduire que l'ensemble (Γ) des points M de ($\mathscr{E}$) tels que :

$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{GM} - \overrightarrow{CM}\right) = 0$ est un plan que l'on caractérisera.

-c) Déterminer et caractérisé les ensembles suivants :

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

$(\Delta)= \{M \in (E)/(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\wedge(\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{CM})=\vec{0}\}$

$(D_2) = \{M \in (E)/\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = 4\|\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{CM}\|\}$

Problème 2

Kokou découvre une information pouvant l'aider à atteindre la cible : les plans (SEF) et (SGH) sont perpendiculaires.

7-a) Ecris un vecteur normal à chacun des deux plans (SEF) et (SEG).

-b) On pose : $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OS}$ avec $\overrightarrow{OS}=\alpha\overrightarrow{OS};\ \alpha>1$.

Ecris en fonction de α les coordonnées du point S.

-c) Montrer que l'information conduit à la résolution d'une équation du second degré d'inconnue α.

Prouver alors que $\alpha=\frac{3}{2}$ et déduis les coordonnées de S.

8°) Kokou décide alors de donner pour trajectoire à la balle, la droite (Δ) perpendiculaire au plan (FCH) et passant par le point $N(1\ ;\ 2)$.

-a) Ecris une représentation paramétrique de la droite (Δ).

-b) Prouver que la cible est atteinte.

Problème 3

9°) Ecris une équation cartésienne du plan (FCH).

10-a) Calcule l'aire du triangle FCH en cm^2.

-b) Montre que FCHD est un tétraèdre et calculer en cm^2 son volume V.

-c) Déduis – enla distance du point G au plan (FCH).

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 13

Contexte : Le porc sec.

Dans le souci de désengorger le port Cotonou, le président de la république a pris l'initiative de faire construire un mouvement porc sec à Parakou. Dossou un ingénieur des travaux publics à gagné l'appel d'offre pour exécuter une partie de ces travaux. Il propose la maquette suivante qui est la salle administrative représentée par le cube ABCDEFBH d'arrêtes 3m ci- dessous. I milieu du segment [GH] et J le centre du carré BCGF.

Dans l'espace orienté $(\mathscr{E})$, on considère le repère orthonormé$(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE})$. Dans l'étude des aspects mathématiques de ces travaux, Dossou rencontre d'énormes difficultés.

Tâche : Tu vas aider Dossou à travers la résolution des problèmes suivant.

Problème 1

1°) Détermine les coordonnées des points E, I, J dans le repère $(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE})$.

-a) Donne une équation cartésienne du plan (EIJ).

-b) Justifie que AEIJ est un tétraèdre et calcule son volume.

3°) Détermine une équation cartésienne du plan médiateur du segment [IJ].

4°) Soit (Γ) l'ensemble des points M' de l'espace tels que

$(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG})\wedge(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH})=0$.

-a) Démontre que $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MJ}$ et $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{MI}$.

-b) Déduis en que (Γ) est une droite (D) dont donnera un repère.

5°) Soit (Δ) la droite dont un système d'équation cartésienne est $x-\frac{1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

-a) Les droites (D) et (Δ) sont elles coplanaires ?

-b) Calcule la distance du point A à la droite (Δ).

6°) Détermine l'ensemble (Q) des points M de l'espace tels que

$\left\|4\overrightarrow{MG}-4\overrightarrow{HM}\right\|-\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\right\|=0$.

Problème 2

L'espace rapporté à un repère orthonormé$\left(A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$. K est un point de l'espace défini par : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG}\right)$.

7°) On désigne par M un point quelconque de l'espace.

-a) Démontre que $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KG}=\vec{O}$

-b) Montre que le vecteur $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est indépendant de M et de norme $3\sqrt{5}$.

-c) Détermine l'ensemble (ψ) des points M de l'espace tels que $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\vec{V}\right\|$.

8°) Soit la droite (D_1) de système d'équations cartésiennes $\begin{cases}x=2\\ \frac{y-1}{-2}=\frac{-z+1}{3}\end{cases}$ et (D_2) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases}x=1\\ y=4\beta+2\\ z=6\beta+1\end{cases}$ $(\beta\in\mathbb{R})$.

-a) Montre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.

-b) Détermine une équation cartésienne du plan (R) les contenant.

Problème 3

En réalité le cube se trouve dans repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ où le point A est repéré comme suit : $\overrightarrow{OA}=-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+6\vec{k}$. On considère le point L défini par : $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

10-a) Détermine les coordonnées des points A, B, C et L dans ce repère.

-b) Démontre que pour tout point M de l'espace : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MG}$.

11°) Soit (P) l'ensemble des points M de l'espace tel que$\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$.

-a) Démontre que (P) est un plan dont on donnera les éléments caractéristiques (un point et un vecteur normal à (P).

-b) Démontre qu'une équation cartésienne de (P) est $2x-y-5z+7=0$.

12°) Donne une représentation paramétrique de (Δ) orthogonal à (P) et passant par $P(-1\ ;\ 1\ ;\ 2)$.

14°) Soit P' le projeté orthogonal de P sur (P).

-a) Détermine les coordonnées de P'.

-b) Calcule la distance du point P au plan (P).

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 14

Contexte : Les gâteaux de la journée culturelle.

Dans le cadre de ces activités culturelles, la section ''cuisine'' a confectionné des gâteaux qu'elle se propose de mettre à la vente. Pour des raisons d'hygiène, ces gâteaux sont exposés dans une boîte en plexiglas représentée par le cube ABCDEFGH d'arrête 1m ci-dessous représenté.

I est le centre de la face BCGF.
J le milieu du segment [BC].
Les gâteaux couverts de chocolats sont rangés dans le solide de base HFC obtenu en reliant le point A à chacun des sommets de HFC.
Par ailleurs, un plan (P) sert de séparation dans la salle de vente. Ariane, élève en classe de Terminale D, membre de cette section est très émerveillé par cette prouesse. Elle y reconnaît certaines configurations étudiées.
Tâche : Tu vas résoudre les trois problèmes ci-après pour te rendre compte des concepts mathématiques qui se cachent derrière.

Problème 1

On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \overrightarrow{AE}$.
1°) Montre que (A ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$) est un repère orthonormé.
2°) On désigne par $\vec{u}$ un vecteur directeur de la perpendiculaire commune aux droites (FH) et (FC).
-a) Montre que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(-1\ ;\ -1\ ;\ -1)$.
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (HFC).
-c) Calcule la distance du point A au plan (HFC).
3-a) Justifie que le solide AHFC est un tétraèdre de base HFC.
-b) Calcule le volume de ce solide.
-c) Montre que les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.

Problème 2

On considère le point G défini par : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.
4°) On désigne par M un point de l'espace.
-a) Démontre que $2\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{O}$
-b) Montre que le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ est indépendant de M et de norme égale à $\sqrt{5}$.
-c) Détermine l'ensemble (Γ) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 5\left\|\vec{V}\right\|^2$.
5°)On désigne par (Γ_m) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} + m\,\overrightarrow{MB} + m\,\overrightarrow{MC}\right\| = m\left\|\vec{V}\right\|$.
-a) Montre que A appartient à (Γ_m).
-b) Détermine suivant les valeurs du paramètre réel m la nature et les éléments caractéristiques de (Γ_m).

Problème 3

6°) Soit $L(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$; $N(1\ ;\ -6\ ;\ -1)$ *et* $S(2\ ;\ 2\ ;\ 2)$ trois points du plan (P).
-a) Donne une équation cartésienne de (P).
-b) Détermine une représentation paramétrique de la droite (Δ) perpendiculaire au plan (P) et passant par le point $T(2\ ;\ 3\ ;\ -5)$ puis détermine les coordonnées du point K intersection de la droite (Δ) et du plan (P).
7°) Soit (D_1) la droite de système d'équations cartésiennes $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{2} = -z$ et (D_2) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
-a) Montre que (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles.
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) les contenant.
8°) On désigne par I le point de coordonnées $(-3\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et I' son projeté orthogonal sur la droite (D_1)
-a) Montre que le point I appartient à la droite (D_2).
-b) Détermine l'équation cartésienne du plan (Q) passant par I et orthogonal à la droite (D_1).
-c) Déduis – en les coordonnées du point I'.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

-d) Calcule alors la distance du point I à la droite (D_1)
-e) Précise la distance des droites (D_1) et (D_2).

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 15

Texte : Fête de fin d'année
Pour les manifestations de la fête de fin de l'année 2012, ANANI a décidé ses invités dans son jardin. Consulté pour aménager le jardin, le technicien Dossou a prévu :

- L'installation, au centre du jardin, des guirlandes suivant une ligne (C) situé dans le plan (EFG) tel que $E(1\,;\,2\,;\,1)\,;\,F(3\,;\,-1\,;\,1)\;et\;G(-1\,;\,0\,;\,2)$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ de l'espace ;
- La création d'une cuisine occasionnelle cachée par trois contre plaqués situés dans les plans ; (P_1) ; (P_2) et (P_3) tels que dans $(O\,;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$ (P_1) :$2x+y+z-5=0$;

(P_2) :$x+2y-z-2=0$; (P_3) contient la droite (D) de système paramétrique
$\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2+2\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$et (P_3) perpendiculaire à (P_1).
Ali se pose des questions sur la pertinence de son plan d'aménagement.
Tâche : Tu vas aider Ali dans ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Justifie que (EFG) est bien un plan puis détermine une équation cartésienne de ce plan.
-b) Ecris une équation cartésienne du plan (P_3).
-c) Vérifier que (EFG) et (P_2) sont sécants.
-d) Démontrer que (P_2) et (P_3) sont perpendiculaires.
3-a) Démontrer que l'intersection des trois plans (EFG) ; (P_2) et (P_3) est réduite à un point N dont on précisera les coordonnées.
-b) Le point N appartient-il à (D) ?

Problème 2

Dossou a trouvé que la ligne des guirlandes (C) est constituée par les points M de l'espace tel que$\left(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}\right).\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+2\overrightarrow{MG}\right)=0$ et considère les points H est K définis par :
$\overrightarrow{EH}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}\right)$ et $\overrightarrow{GK}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}\right)$.
4-a) Démontre que $2\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{GH}=\vec{O}$ et $\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{FK}+2\overrightarrow{GK}=\vec{O}$

-b)Démontre que $2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MH}$ et que $\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}+2\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MK}$.
-c) Détermine les coordonnées de chacun des points H et K.
-d) Démontre que (C) est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre et son rayon.

Problème 3

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Pour la construction d'un autre bâtiment Dossou considère les points
$A(2\,;\,1\,;\,3)$; $B(-3\,;\,-1\,;\,7)$ et $C(3\,;\,2\,;\,1)$ et la droite (Δ) d'équation paramétrique
$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
6-a) Démontre que les points A, B et C ne sont pas alignés.
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (ABC).
7-a) Précise un repère (K, $\vec{u}$) de (Δ).
-b) Détermine les coordonnées du point S de (Δ) d'abscisse -1.
-c) Détermine les coordonnées du point I de (Δ) dont l'abscisse est égale à l'ordonnée.
-d) Ecris un système d'équation cartésienne de (Δ).
-e) Soit la droite (Δ') définie par : $-x = \frac{2y-2}{3} = -2z + 4$.
i) Précise un repère de (Δ').
ii) Prouve que (Δ') et (Δ) sont strictement parallèles.
8-a) Démontre que (Δ) est orthogonal au plan (ABC).
On note H le point d'intersection de (Δ) et de (ABC). Détermine les coordonnées de H.
-b) Calcule la distance du point C à la droite (Δ) et au plan (P).
-c) Calcule l'aire du triangle ABC.
9°) On considère les plans (P) et (Q) d'équation respectives (P) : $3x - y + z + 2 = 0$;
(Q) : $-2x - 4y + 2z + 1 = 0$.
-a) Ecris une équation paramétrique de (P).
-b) Démontre que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
-c) On désigne par (D') la droite d'intersection de (P) et (Q). Détermine une équation cartésienne de (D').
-d) Détermine une équation cartésienne du plan (R), orthogonal à (P) et à (Q) et passant par B.
-e) Détermine une équation cartésienne de (R) ∩ (P) ∩(Q).

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

SUJET 16

Contexte : Construction de boutique

L'entreprise de l'ingénieur John a gagné un marché après avis d'appel d'offres pour construire des boutiques témoins de l'ONASA dans des villages. Les boutiques sans toiture ont la forme d'un cube ABCDEFGH.
Jolidon, un élève en Terminale D, résidant dans l'un de ces villages, cherche à connaître les principes mathématiques qui ont favorisé de telles constructions
Jolidon, est aussi sollicité par l'ingénieur John pour l'aider à déterminer entre autres les ensembles (E_1) et (E_2) des points M de l'espace vérifiant respectivement :
$\left(2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}\right) \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MH}\right).\left(-2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MH}\right) = 0$. Où K est un point de l'espace défini par : $\overrightarrow{HK} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC}\right)$ K est le barycentre des points pondérés (A, 2) ; (C, 2) et (H, 1).

Tâche : A l'instar de Jolidon, tu es invité(e) à aider pour la résolution des trois problèmes suivants.

Problème 1

1°) Détermine les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H dans le repère $\left(A, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

2°) I désigne le milieu du segment [GH] et J le centre du carré BCGF. Détermine les coordonnées des points I, J et K dans le même repère.
3-a) Justifie que les points A, E, I, J sont les sommets d'un tétraèdre.
-b) Calcule le volume du tétraèdre AEIJ.
4-a) Détermine l'ensemble (E_1) puis donne une représentation paramétrique de (E_1).
-b) Détermine l'ensemble (E_2) puis donne une équation cartésienne de (E_2).
-c) Détermine l'intersection de (E_1) et (E_2).

Problème 2

Une étude est initiée pour choisir le site du village de TODAN. Il s'agit du site pour abriter la boutique de l'ONASA. La majorité des populations du village est située sur une droite identifiée (D) et la position du site M_0 doit être à une distance raisonnable de (D). Ainsi, John muni l'espace d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}$) puis considère les droites

(D) : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et (D') : $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{4}$

5.) Démontre que les droites (D) et (D') sont strictement parallèles.
6.) Détermine une équation cartésienne du plan (P) contenant les droites (D) et (D').
7.a) Détermine une équation cartésienne du plan (Q) passant par le point $S(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$ et orthogonal à (D) puis déduis en une représentation paramétrique du plan (Q).
b) Donne un repère de la droite (D) puis déduis – en la distance de $M_o(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ à (D).

Problème 3

Dans l'espace orienter muni d'un repère (O ; $\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}$), on considère le point A(1 ; 1 ; 1) et les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + y + z - 1 = 0$ et $x + y - 2z - 4 = 0$.
1.a) Démontre que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
b) Donner un repère de leur droite d'intersection (Δ).
2-a) Le point A appartient –il à (Δ) ?
-b) Calculer la distance du point A à la droite (Δ).
3.) Soit (D) la droite passant par A et perpendiculaire au plan (P).
-a) Détermine une représentation paramétrique de (D).
-b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur (P).
4°) Soit (R) le plan passant par A et perpendiculaires aux plans (P) et (Q).
-a) Détermine une équation cartésienne du plan (R).
-b) Détermine (P) ∩ (Q) ∩ (R).
-c) Démontre que l'ensemble des points M de l'espace tels que $d(M,(R)) = \sqrt{2}$ est la réunion de deux plans (R_1) et (R_2) que l'on précisera.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

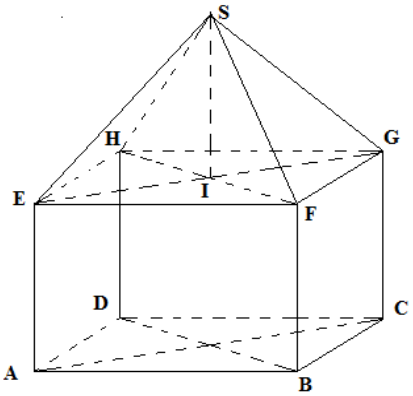
CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

SUJET 17

Texte :

Taka, originaire de Bounkombé, après sa formation en architecture, a décidé de moderniser la construction des ''Tatas''(maison) dans sa région fabrique une maquette dont la représentation est faite ci – dessous.
Cette maquette est un cube ABCDEFGH surmonté d'une pyramide régulière SEFGH telle que SI = AB.
Mica, élève en classe de Terminale D est allé voir TAKA et lui demande des informations relatives à la

réalisation de la maquette. Celui-ci lui précise que dans un repère orthonormé direct de l'espace on a $B(2\,;\,0\,;\,1)\,;\,C(2\,;\,1\,;\,1)\,;\,D(1\,;\,1\,;\,1)\,;\,E(1\,;\,0\,;\,2)\,;\;F(2\,;\,0\,;\,2)$.
Mica se demande comment trouver les coordonnées des autres points dans ce repère et décide de connaître les positions relatives de certains plans et droites.



Tâche : Tu vas aider Mica dans ses préoccupations en résolvant les trois problèmes suivants.

Problème 1

1°) Vérifie que $A(1\,;\,0\,;\,1)\,;\,G(2\,;\,1\,;\,2)\;et\;H(1\,;\,1\,;\,3)$.
2-a) Démontre que les points C, H et A ne sont pas alignés.
-b) Déduis en une représentation paramétrique de (ACH) puis un vecteur normal à ce plan.
3°) Détermine une représentation paramétrique de la droite (IB).
4°) Déduis en l'intersection du plan (ACH) et de la droite (IB).

Problème 2

On considère le plan (Q) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t - f \\ y = t \\ z = 2 + f \end{cases}$ $(t, f\,) \in \mathbb{R}$

1°) Démontre que (Q) = (BED).
2°) Prouver que la droite (IC) est strictement parallèle au plan (Q).
3°) Détermine une équation cartésienne du plan (BEC).
4°) Démontrer que (SCD) et (Q) sont sécant et détermine un repère de (SCD) ∩ (Q).
5°) Prouver que les droites (EC) et (FD) sont sécantes et détermine leur intersection.

Problème 3

Mica veut connaître le volume du solide BCDE et une mesure en degré de l'angle CEB.
1°) Démontre que BCDE est un tétraèdre.
2°) Détermine la hauteur relative au sommet D dans ce tétraèdre.
3°) Détermine l'aire du triangle BCE. Déduis – enle volume de BCDE.
4°) On considère dans $\mathbb{R}^4$ le système de quatre équations linéaires à quatre inconnues x, y, z et t. (S) :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ -x + y - z + t = -4 \\ -8x + 4y + 2z + t = -7 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

-a) Résous le système (S) par la méthode de Pivot de GAUSS.
-b) Détermine les coefficients réels a, b, c et d de la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sachant que la courbe représentative de F tracée dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ passe par les points $A(1\,;\,2)\,;\,B(-1\,;\,-4)\,;\,D(-2\,;\,-7)$ et admet en son point d'abscisse -1un coefficient directeur égal à 1.

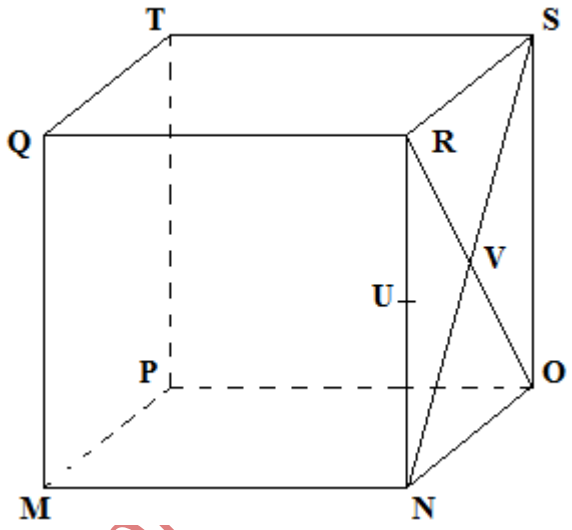
CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Sujet 18

Contexte

La société OLUWA s'occupe de la vente des portables G.S.M. Pour la fête de fin d'année, elle décide d'embellir sa boutique. A cet effet, le chargé de marketing fait construire, en plexiglas transparent deux solides, l'un en forme d'un cbe et l'autre en forme d'un tétraèdre destiné à contenir des portables de marque Samsung. Il choisit en outre de réaliser des décorations lumineuses sur le solide comportant les portables de marque Nokia. La décoration assimilable à un fil passera par les points U et V où V est le centre du carré NOSR et U le milieu du segment [RN] comme l'indique la figure ci – dessous.



Intéressé par ce dispositif, un professeur l'a exploité pour contrôler le niveau de maîtrise des connaissances relatives à la première situation d'apprentissage chez ses élèves d'une première scientifique.

Tâche : Tu vas subir ce contrôle en tant qu'élève de la première scientifique en résolvant rigoureusement les problèmes suivants.

Problème 1

1-a) Démontre que la droite (RO) est orthogonale au plan (MNS).
-b) Déduis – en que le triangle MVR est rectangle.
-c) Détermine l'image du point M par la projection orthogonale sur la droite (RO).
-d) Démontre que les droites (QS) et (PR) sont orthogonales.
2-a) Démontre que la droite (PO) est orthogonale au plan (MQT).
-b) Déduis – en que les plans (MQT) et (POU) sont perpendiculaires.

Problème 2

Le tétraèdre utilisé pour sécuriser les portables Samsung est un tétraèdre ABCD tel que (AB) et (CD) sont orthogonales et (AD) et BC) sont orthogonales. Un point H est une hauteur du triangle BCD.
3-a) Démontre que le plan (ABH) est orthogonal à la droite (CD).

CONCEPTION DU PRO ILE D. GOSSOU

-b) Démontre que (AH) est une hauteur du triangle (ACD).
4°) Démontre que la hauteur (AI) du triangle ABH a son support orthogonal au plan (BCD).
5°) Démontre que (DI) est une hauteur du triangle (BCD).
6°) On se place maintenant dans le cas où le tétraèdre ABCD est régulier et on désigne par K et L les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].
-a) Démontre que la droite (AB) est orthogonale au plan (KCD).
-b) Démontre que le plan (KCD) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (ABD).
-c) Démontre que le plan (LAD) est perpendiculaire aux plans (ABC) et (BCD).
-d) Démontre que les arêtes opposées du tétraèdre sont orthogonales.

Problème 3

En réalité le dispositif qui permet de sécuriser les portables de marque Nokia est réalisé dans su repère orthonormé $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ où le point M est défini par : $\overrightarrow{OM} = -3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{k}$ et on considère les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\right)$ et $\vec{v}\left(0\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
7-a) Détermine dans ce repère les coordonnées de chacun des points O, P, Q et R.
-b) Détermine une équation cartésienne du plan (PQR).
-c) Déduis – en une représentation paramétrique de la droite (MT).
8-a) Démontre que les vecteurs $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont orthogonaux et de norme 1.
-b) Déduis – en un vecteur $\vec{w}$ pour que le triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée.
-c) Détermine dans cette base les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

Fin !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

CONCEPTION DU PROFESSEUR THEOPHILE D. GOSSOU